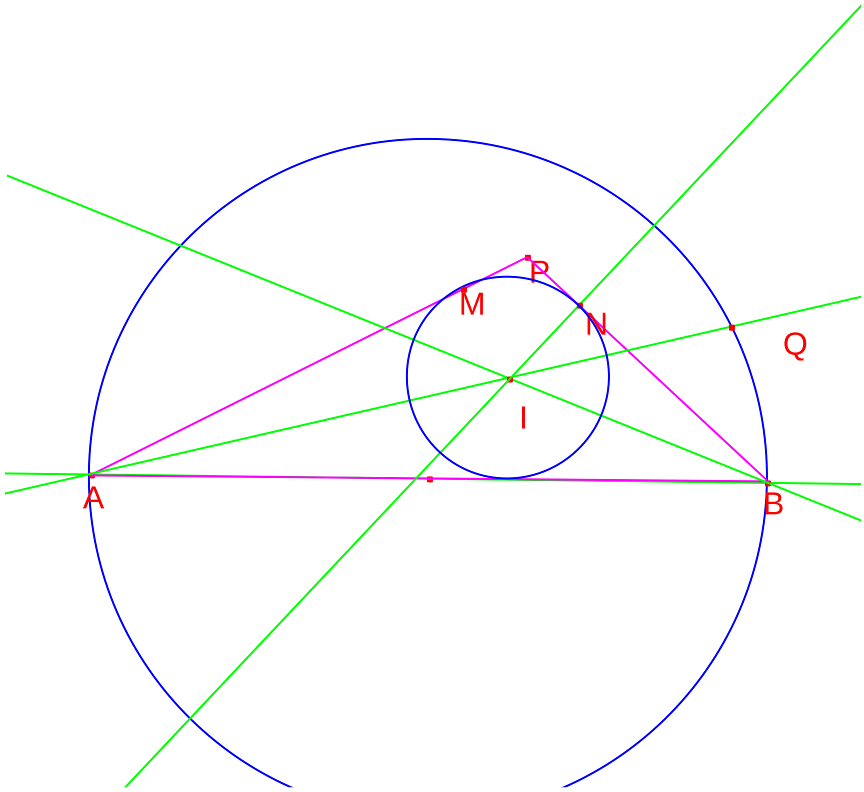
Problema 852

Sea P un punto interior de un semicírculo de diámetro AB .

La circunferencia inscrita al triángulo ABP es tangente a los lados AP y BP en los puntos M y N, respectivamente.

La recta MN corta a la semicircunferencia en los puntos X y Y. Pruebe que la medida del arco XY es igual a la medida del ángulo APB

Referencia desconocida.



Sean < PAB=2α , <PBA= 2β. Será <APB= 180-2 α -2 β, luego al ser el triángulo MPN isósceles en P, es <PNM=<PMN= α + β.

Sea Q el punto de corte de la bisectriz del ángulo A con la circunferencia de diámetro AB.

Sea el cuadrilátero INQB. Al ser <AQB=90º, es <IQB=90º. Al ser BP tangente a la circunferencia inscrita, es <INB=90º, luego INQB es un cuadrilátero inscrito.

<QIN=<QBN= <BQA - <QAB - <NBA= 90- α -2 β . Además, <IQN=<IBN= β

Sea T el punto de corte de IQ con NB.

$<BTQ= \ <TQB - <QBT = 90 - <QBN= \alpha +2 \beta$.

En el triángulo NTQ, es: $<NTQ = 180- \alpha - 2b$,

Así finalmente, $<QNT = 180 - < NTQ - <NQT= 180- (180 – \alpha - 2 \beta) – (\beta)= \alpha +\beta$.

De esta manera, el punto Q =Y

Sea R el punto de corte de la bisectriz de B con la circunferencia de diámetro AB.

Sea S el punto de intersección de BR con PA.

Por razonamiento análogo, es $\angle RMS= \alpha +\beta$.

Y también R=X.

De esta manera, el arco XY abarca 180º-2α-2β, y se cumple el enunciado.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla.