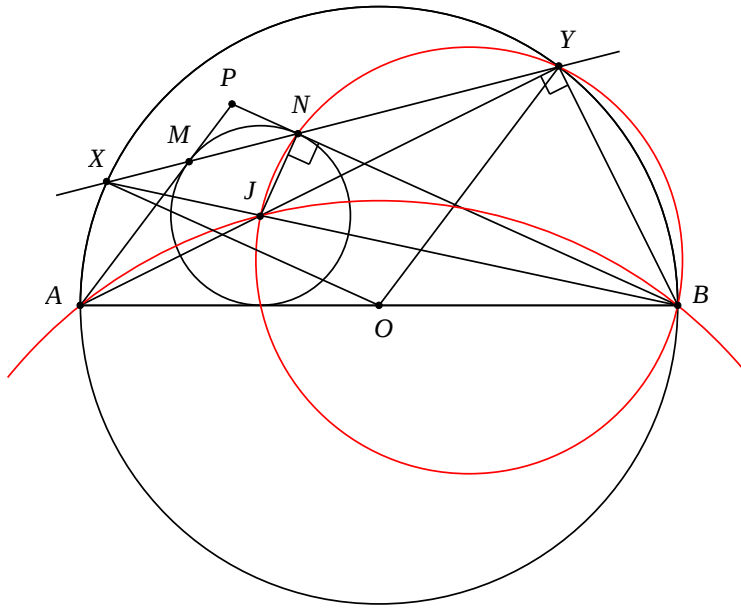


Problema 852. Sea P un punto interior de un semicírculo de diámetro AB . La circunferencia inscrita al triángulo ABP es tangente a los lados AP y BP en los puntos M y N , respectivamente. La recta MN corta a la semicircunferencia en los puntos X y Y . Pruebe que la medida del arco XY es igual a la medida del ángulo APB .

Referencia desconocida.

Solución de Ercole Suppa. Vamos a demostrar primero que AX y BY son las bisectrices de los ángulos $\angle PAB$ y $\angle PBA$ respectivamente.



Sea J el segundo punto de intersección ($J \neq Y$) de AX con la circunferencia que pasa por los puntos B, Y, N .

Dado que $\angle JYB = \angle AYB = 90^\circ$ tenemos $\angle JNB = \angle JYB = 90^\circ$ es decir

$$JN \perp PB \quad (1)$$

Por otro lado, como $BYNJ$ es un cuadrilátero cíclico, tenemos

$$\angle YJB = \angle YNB = \angle PNM = \frac{\angle PNM + \angle PMN}{2} = \frac{\angle PAB + \angle PBA}{2} = 90^\circ - \frac{\angle APB}{2}$$

así que

$$\angle AJB = 180^\circ - \angle YJB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle APB}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\angle APB}{2} \quad (2)$$

es decir J pertenece al lugar de los puntos que ven el segmento AB bajo un ángulo de amplitud $90^\circ + \frac{\angle APB}{2}$.

De (1) y (2) se sigue que J es el incentro del triángulo APB y, por lo tanto, AX es la bisectriz del ángulo $\angle PAB$. De forma similar, se muestra que BY es la bisectriz del ángulo $\angle PBA$.

Entonces, indicado con O el punto medio de AB tenemos

$$\begin{aligned}\angle XOY &= 180^\circ - \angle AOX - \angle BOY \\ &= 180^\circ - 2\angle XBA - 2\angle YAB \\ &= 180^\circ - \angle PBA - \angle PAB = \angle APB\end{aligned}$$

y esto concluye la demostración.

□