Problema 852 de *triánguloscabri*. *Sea P un punto interior de un semicírculo de diámetro AB.*

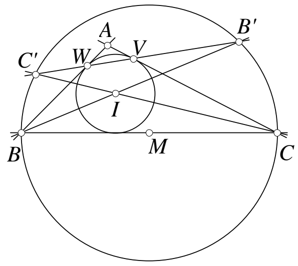
La circunferencia inscrita al triángulo ABP es tangente a los lados AP y BP en los puntos M y N, respectivamente.

La recta MN corta a la semicircunferencia en los puntos X y Y. Pruebe que la medida del arco XY es igual a la medida del ángulo APB.

Referencia desconocida.

Por comodidad escribimos el problema en la forma siguiente:

Problema. *Sean ABC un triángulo con incentro I y sea M el punto medio de BC. Sean V, W los puntos de contacto de la circunferencia inscrita (I) con los lados CA y AB, respectivamente, y B', C' las intersecciones de la recta VW con la circunferencia de diámetro BC. Entonces $\angle B'MC' = \angle A$.*



Solución de Francisco Javier García Capitán. Al hacer la figura observamos que los puntos B' y C' parecen estar sobre las bisectrices interiores de los ángulos B y C. A partir de este hecho, el problema está resuelto, ya que midiendo ángulos en (BC), la circunferencia con diámetro BC: $\angle BMC' = 2 \cdot \angle BCC' = \angle C$ y $CMB' = 2\angle CBB' = \angle B$. Por tanto,

$$\angle B'MC' = 180^\circ - \angle B - \angle C = \angle A.$$

Para completar la solución, consideramos $B' = BI \cap VW$ y $C' = CI \cap VW$ y demostramos que B' y C' están sobre (BC). Por simetría, bastará demostrar que B' está sobre (BC).

Coordenadas baricéntricas

- La intersección de dos rectas de ecuaciones $p_i x + q_i y + r_i z = 0$ $(i = 1, 2)$ viene dado por el producto vectorial de los coeficientes, es decir:

$$(x : y : z) = \left(\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right).$$

- El punto del infinito de la recta de ecuación $px + qy + rz = 0$ es $(q - r : r - p : p - q)$ ya que sus coordenadas suman cero y satisface la ecuación.

- Si las coordenadas de dos puntos dados $P = (u_1 : v_1 : w_1)$ y $Q = (u_2 : v_2 : w_2)$ tienen la misma suma, el punto del infinito de la recta PQ viene dado por $(u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2)$.

B' ESTÁ SOBRE (BC)

Partimos de las coordenadas baricéntricas de los datos del problema:

$$B = (0 : 1 : 0), M = (0 : 1 : 1), C = (0 : 0 : 1),$$

$$I = (a : b : c), V = (s - c : 0 : s - a), W = (s - b : s - a : 0).$$

La recta $VW : (s - a)x - (s - b)y - (s - c)z = 0$ corta a la bisectriz $BI : cx - az = 0$ en el punto $B' = (a : c - a : c)$, con suma $2c$.

Por otro lado, la bisectriz exterior del ángulo B, que une los excentros $I_a = (-a : b : c)$ e $I_c = (a : b : -c)$ tiene ecuación $cx + az = 0$, y su punto del infinito es $(a : c - a : -c)$.

Teniendo en cuenta que $C = (0 : 0 : 2c)$, el punto del infinito de la recta $B'C$ es $(a : c - a : -c)$, el mismo que el de la bisectriz exterior del ángulo B. Deducimos entonces que $B'C$ es paralela a la bisectriz exterior del ángulo B y, por tanto, perpendicular a la bisectriz BI. En consecuencia B' está sobre (BC) y, por simetría, C' estará también sobre (BC).