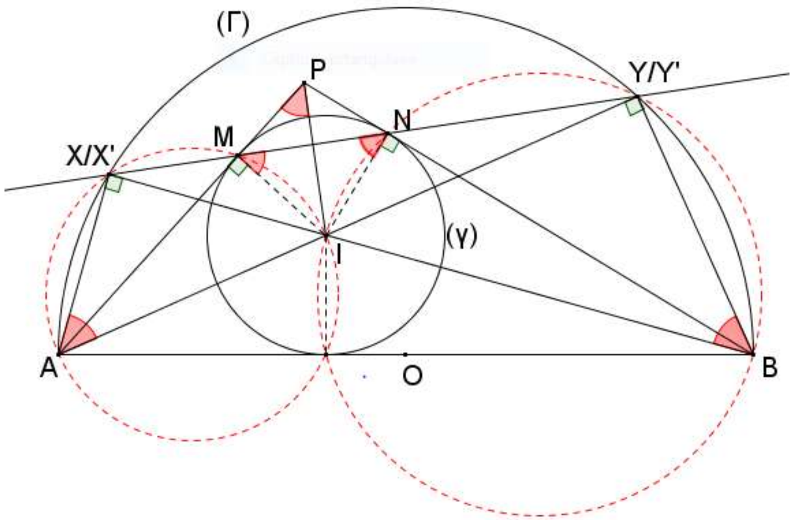
Problema n°852
Sea P un punto interior de un semicírculo de diámetro AB .
La circunferencia inscrita al triángulo ABP es tangente a los lados AP y BP en los puntos M y N, respectivamente.
La recta MN corta a la semicircunferencia en los puntos X y Y. Pruebe que la medida del arco XY es igual a la medida del ángulo APB

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soient (Γ) le demi-cercle de diamètre AB et (γ) le cercle inscrit de centre I du triangle PAB.
Les bissectrices AI et BI coupent le cercle (Γ) de cntre O aux points X' et Y'. Nous allons démontrer que la droite X'Y' est confondue avec la droite XY.
Les triangles AX'I et AMI étant rectangles, les quatre points A,X',M et I sont cocycliques.
On a donc $\angle IMX' = \pi - \angle IAX' = \pi - (\angle BAX' - \angle BAI)$
soit $\angle IMX' = \pi - (\pi/2 - \angle ABI) + \angle BAI = \pi/2 + \angle ABI + \angle BAI$.
De la même manière $\angle INY' = \pi/2 + \angle ABI + \angle BAI$.
Or $\angle IMN = \angle INM = \angle IPM = \angle APB/2$.
Il en résulte que: $\angle IMX' + \angle IMN = \angle INY' + \angle INM = \pi$. Les quatre points X',M,N et Y' sont donc alignés. Comme les points X et Y sont sur la droite MN et le cercle (Γ), les deux droites XY et X'Y' sont confondues.
L'angle qui sous-tend l'arc (XY) est égal à $\angle XAY = \angle XOY/2 = \angle IMN = \angle APB/2$. Cqfd.