

THAILAND (2005)

or

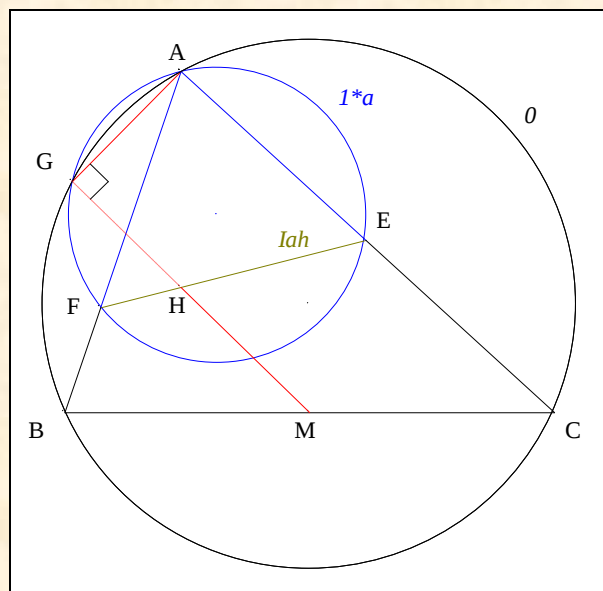
SWISS TEAM SELECTION TEST (2006)

ÉMERGENCE POTENTIELLE

†

*La Géométrie intérieure,  
une voie de réalisation intérieure.*

Jean-Louis Ayme <sup>1</sup>



**Résumé.**

L'auteur dans cet article s'intéresse à la recherche d'une date, à savoir celle qui pourrait correspondre à l'émergence potentielle du problème 3 du TST de Suisse proposé en 2006. Pour cela, tous les lemmes mis en œuvre dans la résolution sont référenciés et datés. En conclusion, ce problème aurait pu être posé dès 1822. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

**Abstract.**

The author in this article focuses on the search of a date, which could correspond to the potential emergence of the TST problem 3 of Switzerland proposed in 2006. To do this, all lemmas implemented in the resolution are referenced and dated. In conclusion, this problem could be proposed as early as 1822. The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

## Sommaire

Point de vue

|            |                                                           |    |
|------------|-----------------------------------------------------------|----|
| <b>A.</b>  | Thailand (2005) or Switzerland TST Day 3 Problem 3 (2006) | 4  |
| <b>B.</b>  | La formulation de l'auteur                                | 6  |
| <b>C.</b>  | Histoire imaginée par l'auteur de l'émergence du problème | 7  |
| <b>1.</b>  | Thalès de Milet                                           |    |
| <b>2.</b>  | Euclide d'Alexandrie                                      |    |
| <b>3.</b>  | Archimède de Syracuse                                     |    |
| <b>4.</b>  | École pythagoricienne                                     |    |
| <b>5.</b>  | Pappus d'Alexandrie                                       |    |
| <b>6.</b>  | Philippe de La Hire                                       |    |
| <b>7.</b>  | Colin MacLaurin                                           |    |
| <b>8.</b>  | Gaspard Monge                                             |    |
| <b>9.</b>  | L'alignement de 1822                                      |    |
| <b>10.</b> | Karl Wilhelm Feuerbach                                    |    |
| <b>C.</b>  | Conclusion                                                | 15 |

## POINT DE VUE



2



L'auteur a suivi du 27 mai 2006 au 18 juin 2014, le fil du site *Art of Problem Solving*<sup>3</sup> concernant le problème 3 du TST de Suisse posé le troisième jour.

Ce problème sans référence à son auteur a attiré la curiosité de près de 1200 visiteurs dont 53 contributeurs ont présentés

des preuves par

- \* la géométrie classique (angle, rapports, trigonométrie, triangles égaux ou semblables, quaterne harmonique, puissance)
- \* l'application de l'algèbre à la géométrie (barycentre, matriciel)
- \* l'application de l'analyse à la géométrie (similitude, inversion)

des remarques

- \* why this problem is so attractive ?
- \* after all these proofs, which is the one who is the more simple ?
- \* It is natural to tackle this problem using results from then it will be clear where things come from, where they are going to and that knowledge will make it much easier to approach the problem, maybe even synthetically.

et des liens avec des problèmes similaires.

Face à une absence de référence du problème 3, l'auteur a eu l'idée de rechercher la date possible de son émergence en fonction des outils nécessaires à la résolution.

<sup>2</sup>  
<sup>3</sup>

Blick auf das Schloss Montfort von Bodensee aus  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1>

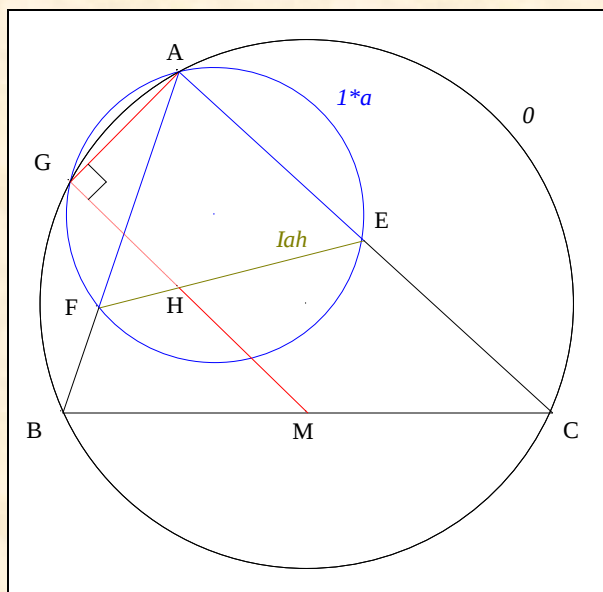
## A. THAILAND (2005)

OR

## SWITZERLAND TST DAY 3 PROBLEM 3 (2006)

## VISION

Figure :



**Traits :**

|        |                                                           |
|--------|-----------------------------------------------------------|
| ABC    | un triangle acutangle,                                    |
| $O$    | le cercle circonscrit à ABC,                              |
| M      | le milieu de [BC],                                        |
| H      | l'orthocentre de ABC,                                     |
| $Iah$  | la A-isocélienne <sup>4</sup> de ABC issue de H,          |
| E, F   | les points d'intersection de $Iah$ resp. avec [AC], [AB], |
| $1^*a$ | le cercle circonscrit au triangle AEF,                    |
| et     | G le second point d'intersection de $1^*a$ et $O$ .       |

**Donné :** (MH) est perpendiculaire à (AG) en G. <sup>5</sup>

**Commentaire :** l'auteur n'a pas pu préciser la référence de 2005 au sujet du problème de la Thaïlande.

**Archive :**

<sup>4</sup> Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle  
<sup>5</sup> HM is perpendicular to a common chord, Thailand 2005, *Mathlinks* du 01/06/ 2011 ;  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=409570>  
 Switzerland, Team Selection Test Day 3 (2006) ;  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=164&cid=227&year=2006>  
 Hard to approach it !, AoPS du 25/05/2006 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=89098>  
 Geometry Problem, *Mathlinks* du 28/01/2011 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=388742>

## Switzerland Team Selection Test 2006

### Day 3

- 3 Let  $\triangle ABC$  be an acute-angled triangle with  $AB \neq AC$ . Let  $H$  be the orthocenter of triangle  $ABC$ , and let  $M$  be the midpoint of the side  $BC$ . Let  $D$  be a point on the side  $AB$  and  $E$  a point on the side  $AC$  such that  $AE = AD$  and the points  $D, H, E$  are on the same line. Prove that the line  $HM$  is perpendicular to the common chord of the circumscribed circles of triangle  $\triangle ABC$  and triangle  $\triangle ADE$ .

6

## Geometry Solved Problems

Page 1 of 38 [ 1481 topics ]

Go to page 1, 2, 3, 4, 5 ... 38 Next

| Topics                                                                                                                                                                        | Author | Comments | Views | Last post                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|----------|-------|--------------------------------------|
|  <b>Hard to approach it !</b><br>Source: Swiss Imo Selection 2006<br>[ Go to page: 1, 2, 3 ] | BogG   | 53       | 11901 | Jun 18, 2014, 9:17 am<br>JuanOrtiz → |



**BogG**  
 ☆☆☆☆☆  
 Please, don't drink and derive  


**Posts:** 60  
**Location:** Lausanne  
 Suisse  


Rate: 

Let  $\triangle ABC$  be an acute-angled triangle with  $AB \neq AC$ . Let  $H$  be the orthocenter of triangle  $ABC$ , and let  $M$  be the midpoint of the side  $BC$ . Let  $D$  be a point on the side  $AB$  and  $E$  a point on the side  $AC$  such that  $AE = AD$  and the points  $D, H, E$  are on the same line. Prove that the line  $HM$  is perpendicular to the common chord of the circumscribed circles of triangle  $\triangle ABC$  and triangle  $\triangle ADE$ .

Last edited by BogG on May 26, 2006, 6:18 am, edited 4 times in total.

May 25, 2006, 1:45 pm • # 1

7

6

Switzerland, Team Selection Test Day 3 (2006) ;

<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=164&cid=227&year=2006>

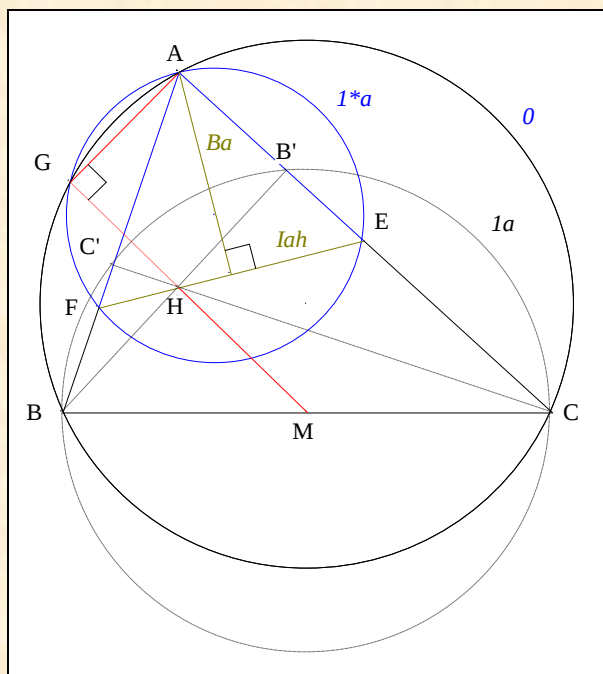
7

Hard to approach it !, AoPS du 25/05/2006 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=89098>

## B. LA FORMULATION DE L'AUTEUR

## VISION

Figure :



**Traits :** ABC un triangle acutangle,  
 M le milieu de [BC],  
 1a le cercle de centre M passant par B,  
 B', C' les points d'intersection de 1 resp. avec (AC), (AB),  
 O le cercle circonscrit à ABC,  
 H le point d'intersection de (BB') et (CC'),  
 Ba la A-bissectrice intérieure de ABC,  
 Iah la perpendiculaire à Ba issue de H,  
 E, F les points d'intersection de Iah resp. avec [AC], [AB],  
 N le milieu de [EF],  
 1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF,  
 et G le second point d'intersection de 1\*a et O.

**Donné :** (MH) est perpendiculaire à (AG) en G.

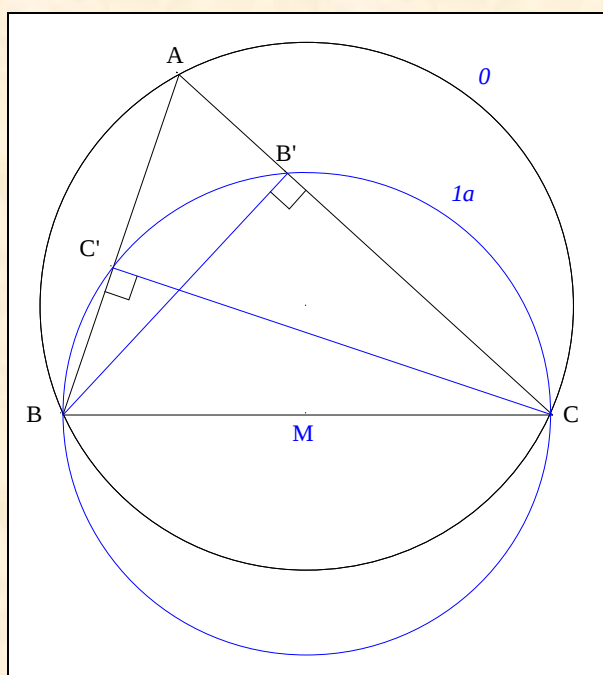
**C. HISTOIRE IMAGINÉE**  
**PAR**  
**L'AUTEUR**  
**DE**  
**L'ÉMERGENCE DU PROBLÈME**

**Commentaire :** les traits de la figure sont présentés dans l'ordre chronologique en citant leur auteur.

**1. Thalès de Milet (624 av. J.-C. – 547 av. J.-C.)**

**VISION**

**Figure :**



**Traits :** ABC un triangle,  
M le milieu de [BC],  
1a le cercle de diamètre [BC],  
B', C' les points d'intersection de 1 resp. avec (AC), (AB),

**Donné :** les triangles B'BC, C'BC sont resp. B', C'-rectangles.

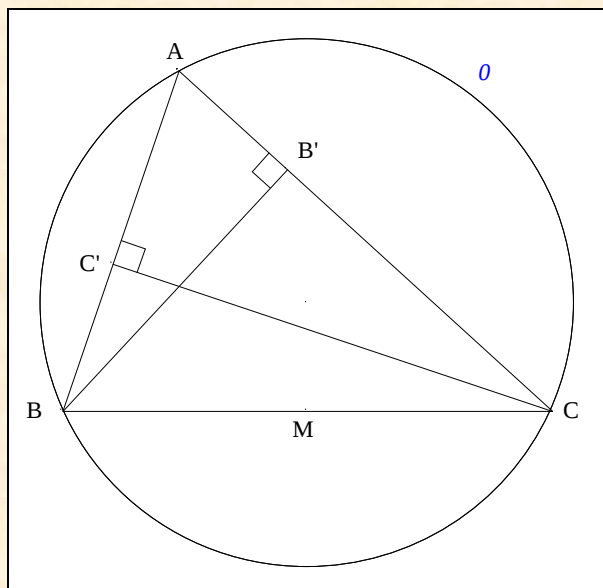
**Solie :** M est le centre de 1a.

**Terminologie :** 1a est "le A-cercle de Thalès de ABC".

## 2. Euclide d'Alexandrie (vers 325 - vers 265 av J.-C.)

### VISION

Figure :



**Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons  
 $O$  un cercle circonscrit à  $ABC$ .

**Donné :**  $O$  est unique.<sup>8</sup>

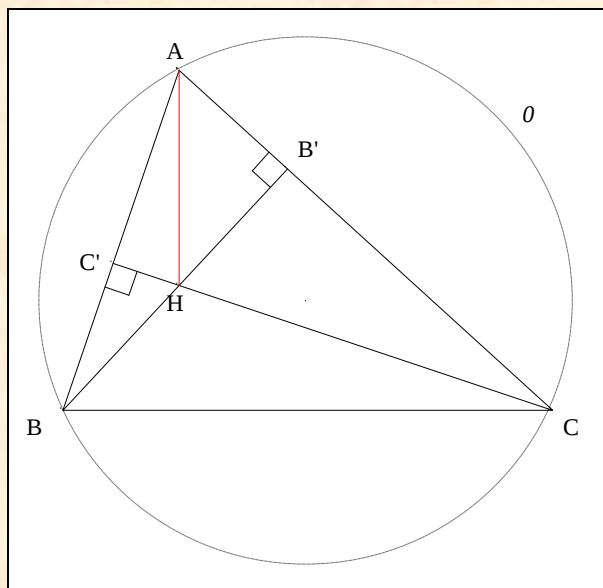
**Terminologie :**  $O$  est "le cercle circonscrit à  $ABC$ ".

## 3. Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.C.-212 av. J.C.)

### VISION

Figure :

<sup>8</sup> Euclide, *Éléments* Livre IV, proposition 5



**Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons  
H le point d'intersection de (BE) et (CF).

**Donné :** (AH) est perpendiculaire à (BC).<sup>9</sup>

**Terminologie :** H est "l'orthocentre de ABC".

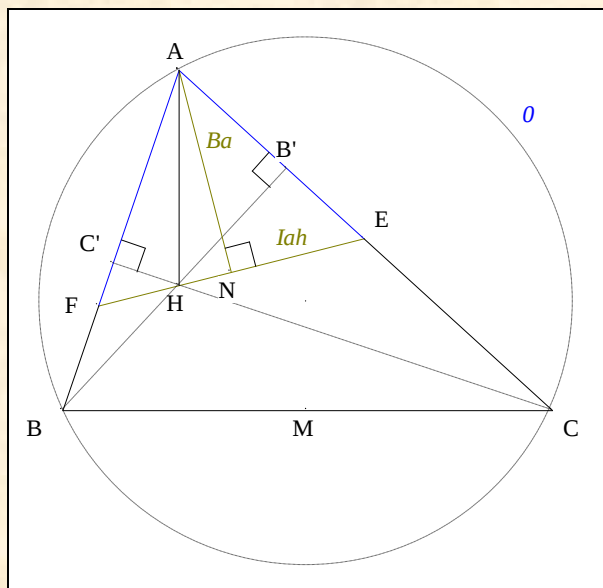
**Note historique :** Euclide ignore le concept d'orthocentre dans ses *Éléments*, alors qu'Archimède en parle sous un autre nom dans le lemme 5.

#### 4. École pythagoricienne (VIe av. J.-C. – 180 av. J.-C.)

### VISION

**Figure :**

<sup>9</sup> Archimède de Syracuse, en grec ancien, Ἀρχιμήδης / *Arkhimédês*), *Scolies*, lemme 5  
Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas 5



**Traits :** les hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons  
           *Ba* la droite issue de A et partageant l'angle  $\angle BAC$  en deux angles égaux,  
           *Iah* la perpendiculaire à *Ba* issue de H,  
           E, F les points d'intersection de *Pah* resp. avec [AC], [AB]  
       et    N le point d'intersection de *Pah* et *Ba*.

**Donné :** N est le milieu de [EF].

**Terminologies :** (1) *Ba* est "la A-bissectrice intérieure de ABC"  
                           (2) *Iah* est "la A-isocélienne<sup>10</sup> de ABC issue de H".

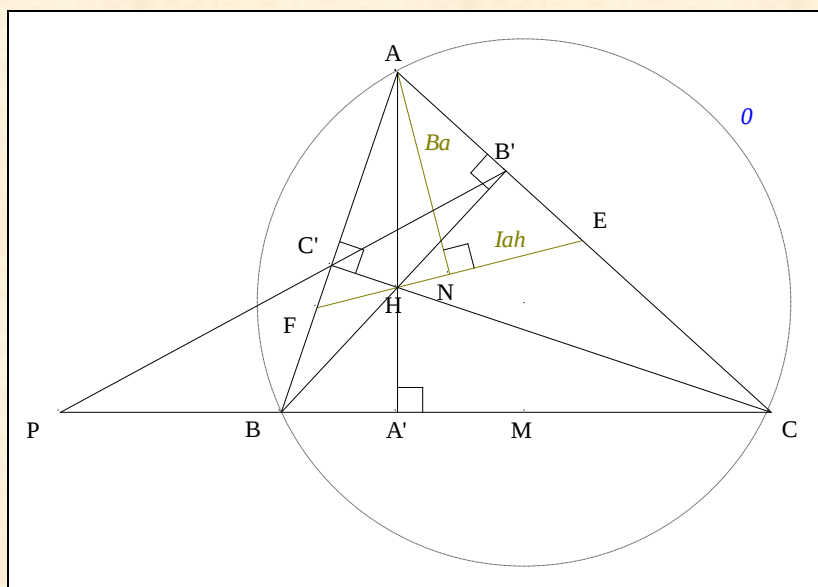
**Note historique :** selon le géomètre américain Nathan Altshiller-Court<sup>11</sup>,  
                           le centre d'un triangle défini comme point de concours de ses bissectrices intérieures<sup>12</sup>,  
                           était connu de l'École pythagoricienne.

## 5. Pappus d'Alexandrie (IVe siècle)

### VISION

**Figure :**

<sup>10</sup> Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle  
<sup>11</sup> Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936)  
<sup>12</sup> Euclide d'Alexandrie, *Éléments*, Livre IV, problème 4, proposition 4



**Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

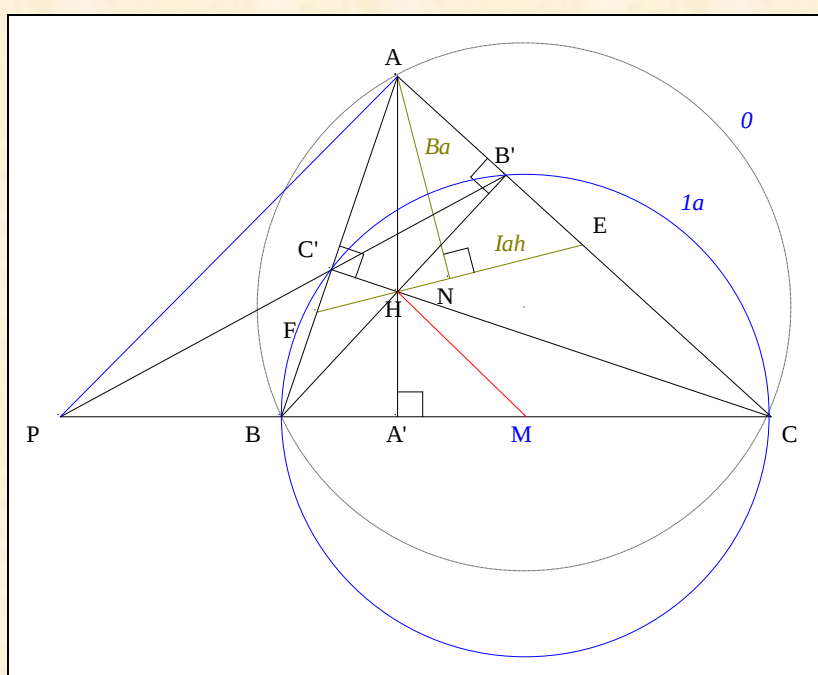
et  $A'$  le pied de la A-hauteurs de ABC  
 $P$  le point d'intersection de  $(B'C')$  et  $(BC)$ .

**Donné :** le quaterne  $(B, C, A', P)$  est harmonique.<sup>13</sup>

## 6. Philippe de La Hire (18/03/1640 – 21/04/1718)

### VISION

**Figure :**



<sup>13</sup> Pappus d'Alexandrie, nom latinisé de Pappos d'Alexandrie, en grec Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς, *Synagogè* (vers 340) livre VII proposition 131

**Traits :** les hypothèses et notations précédentes sont les mêmes.

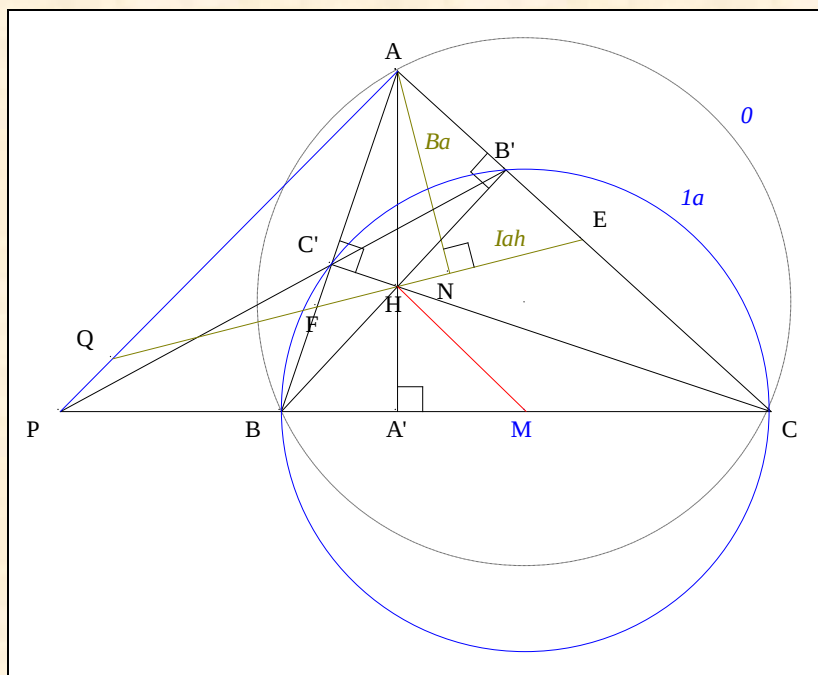
**Donné :** (MH) est perpendiculaire à (AP).<sup>14</sup>

**Commentaire :** cette situation a été traitée par Philippe de La Hire en 1685 dans le livre **I**, proposition **22** des *Sectiones conicae in novem libros distributae* <sup>15</sup>.  
L'auteur a rencontré cet exercice résolu sans référence dans le livre *Exercices de Géométrie Moderne* de Georges Papelier datant de 1927.

## 7. Colin MacLaurin ( ?/02/1698 -14/06/1746)

## VISION

**Figure :**



**Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons  
Q le point d'intersection de (AP) et (EF).

**Donné :**  $QE.QF = QH.QN.$  <sup>16</sup>

**Commentaire :** cette relation conséquence d'un quaterne harmonique est la moins connue.  
Nous la trouvons dans *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus*  
dont le début de l'écriture a commencé en 1721 et qui réapparaît en annexe de façon posthume

<sup>14</sup> Papelier G. (02/08/1860 - 28/11/1943), *Exercices de Géométrie Moderne*, Pôles et polaires n° **34** (1927) 24, Eds J. Gabay (1996)  
MH perpendicular at, *Mathlinks* du 26/01/2006 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=72094>  
Ayme J.-L., La réciprocité polaire de La Hire, G.G.G. vol. **13**, p. 24 ; <http://perso.orange.fr/j.layme>

15 [http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe\\_de\\_la\\_Hire](http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire)

16 Relation de MacLaurin C., Wikipedia ; [http://fr.wikipedia.org/wiki/Division\\_harmonique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Division_harmonique)  
Lebossé et Hémery, *Géométrie, Classe de Mathématiques*, Nathan (1961), p. 168

dans *Treatise of Algebra* en 1748.

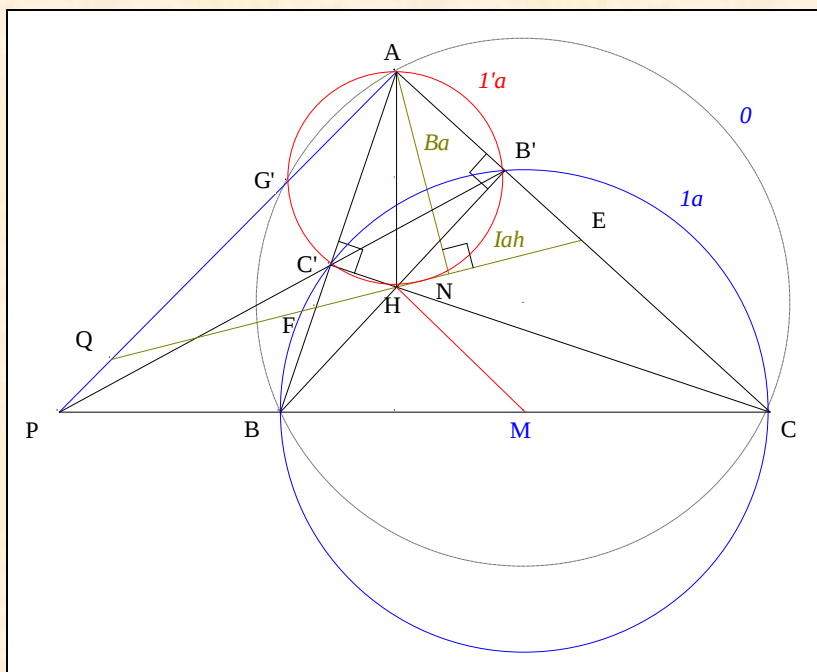
### VISUALISATION

- D'après C. 5. Pappus, le pinceau  $(A ; B, C, A', P)$  étant harmonique, le quaterne  $(F, E, H, Q)$  est harmonique.
- **Conclusion** :  $N$  étant le milieu de  $[EF]$ ,  $QE.QF = QH.QN$ .

### 8. Gaspard Monge (09/05/1746 - 28/07/1818)

### VISION

Figure :



**Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons  
            $1'a$  le cercle de diamètre  $[AH]$   
           et  $G'$  le second point d'intersection de  $1'a$  et  $1a$ .

**Donné :**  $(AG')$  passe par  $P$ .

**Commentaire :** en 1822, Jean Victor Poncelet<sup>17</sup> attribue "le théorème des trois cordes" au comte de Péluse, Gaspard Monge.

<sup>17</sup>

Poncelet J.V., *Traité des propriétés projective des figures* (02/06/1822) tome 1, 40



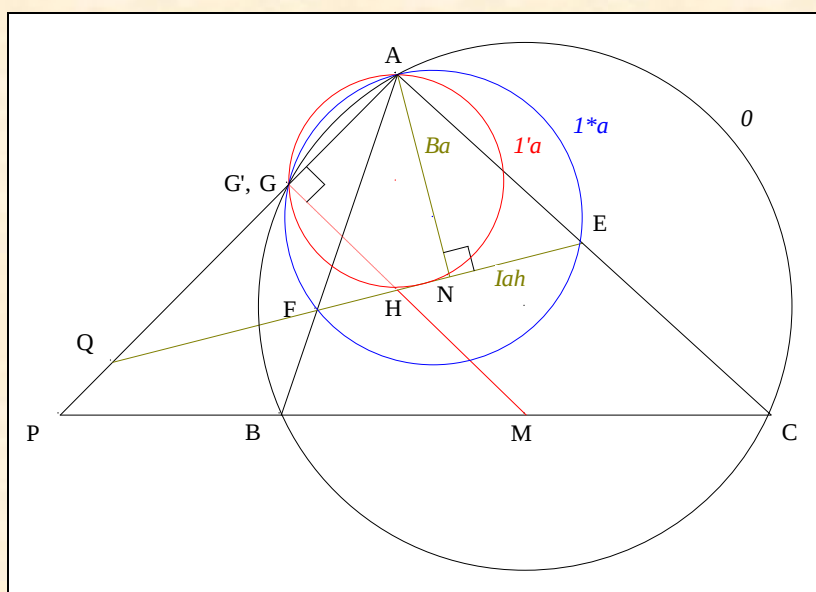
- \* Euclide d'Alexandrie <sup>19</sup>  $(MH) \parallel (HG')$
- \* le postulat d'Euclide <sup>20</sup>,  $(MH) = (HG')$
- \* en conséquence, M, H et G' sont alignés.

• **Conclusion :** (MH) est perpendiculaire à (AG') en G'.

**10. Karl Wilhelm Feuerbach (30/05/1800 – 12/03/1834)**

### VISION

**Figure :**



**Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons  
                    $1^*a$  le cercle circonscrit au triangle AEF,  
                   et G le second point d'intersection de  $1^*a$  et  $O$ .

**Donné :** (MH) est perpendiculaire à (AG) en G.

**Commentaire :** enfin, nous arrivons à la date recherchée...

### VISUALISATION

• D'après

- \* C. 7. Colin MacLaurin,  $QE.QF = QH.QN$ .
- \* Euclide <sup>21</sup>,  $QH.QN = QG'.QA$

<sup>19</sup> Euclide, *Éléments*, Livre I, proposition 27

<sup>20</sup> Euclide, *Éléments*, Livre I, demande (axiome) 5

- \* par transitivité de la relation  $=$ ,  $QR.QS = QG'.QA.$
- \* par la condition de cocyclité, parfois dite de Feuerbach <sup>22</sup>,  $I*a$  passe par  $G'$
- \* en conséquence,  $G$  et  $G'$  sont confondus.

- **Conclusion :**  $(MH)$  est perpendiculaire à  $(AG)$  en  $G$ .

### C. CONCLUSION

Notre recherche se termine... l'année 1822 apparaît comme étant celle qui aurait pu voir l'émergence du problème 3 du TST de Suisse du troisième jour.

---

<sup>21</sup> Euclide, *Éléments*, Livre III, proposition 36 ; <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII35.html>

<sup>22</sup> Feuerbach K., *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*, Nürnberg (1822)