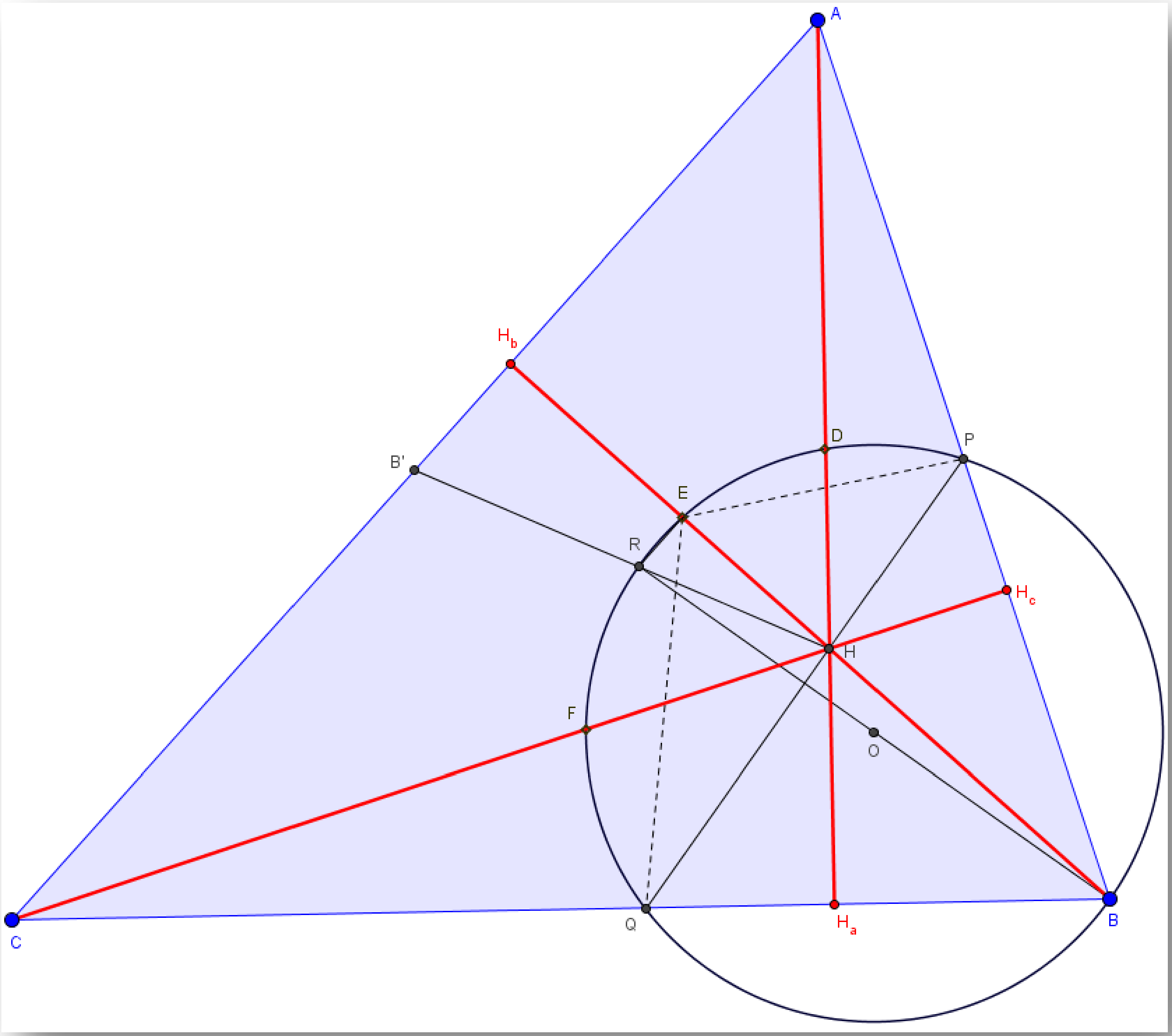
Problema 854.-
El triángulo ABC es acutángulo y no isósceles. Las alturas desde A y C respectivamente, AH_a y CH_c se cortan en el ortocentro H. La bisectriz del ángulo agudo entre las alturas AH_a y CH_c corta al lado AB en P y al lado BC en Q. La bisectriz interior del ángulo B corta en R a la recta que une el ortocentro H con el punto medio B' del lado AC.
Demostrar que los puntos B, P, R, Q están en una circunferencia.

Propuesto por Francisco Bellot (2008).Revista Escolar de la OIM (Problema 151)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea realizada la construcción según el enunciado.



En primer lugar, observamos que el triángulo BPQ es isósceles ya que $\measuredangle PQB = \measuredangle QPB = 90º - \frac{B}{2}$.
Por tanto, la bisectriz interior del ángulo B será también mediatriz del lado PQ. Si consideramos la circunferencia circunscrita al triángulo BPQ, quedará claro que los puntos B, P, Q y R (diametralmente opuesto a B) son concíclicos. Sea esta, la circunferencia ℸ de centro, el punto O y de radio r.
Consideramos los puntos D, E y F como aquellos puntos donde las respectivas alturas AH_a , BH_b y CH_c cortan a la circunferencia ℸ.

Para nuestro propósito bastará probar que los puntos $H, R\ y\ B'$ están alineados. Y esto será evidente, si probamos que los triángulos rectángulos $HH_bB^{'}\ y\ HER$ son semejantes. Bastará para ello, probar que:

$$\frac{H_bB^{'}}{H_bH} = \frac{ER}{EH}$$

Tenemos, en general, que si $b > c$, entonces:

$$H_bB^{'} = \frac{b}{2} - cCosA = \frac{aCosC + cCosA}{2} - cCosA = \frac{aCosC - cCosA}{2}$$

$$HH_b = \frac{a\ \ CosC\ CosA}{SenA}$$

Por tanto, podemos expresar dicho cociente como:

$$\frac{H_bB^{'}}{HH_b} = \frac{senA\ (aCosC - cCosA)}{2a\ \ CosC\ CosA} = \frac{1}{2}\left(tanA - \frac{c\ senA}{a\ cosC}\right) = \frac{1}{2}(tanA - tanC)$$

Ahora vamos a obtener la siguiente proporción $\frac{ER}{EH}$. Para ello, tenemos que:

$$\frac{EH}{sen\measuredangle EPH} = \frac{EP}{sen\measuredangle EHP}\ \ y\ \ \frac{EP}{sen\measuredangle EQP} = 2r;$$
$$\frac{EH}{sen(90° - C)} = \frac{EP}{sen\left(C + \frac{B}{2}\right)}\ \ y\ \ \frac{EP}{sen(90° - A)} = 2r;$$
$$EH = \frac{EP}{sen\left(C + \frac{B}{2}\right)} sen(90° - C) = \frac{2r\ sen(90° - A)sen(90° - C)}{sen\left(C + \frac{B}{2}\right)} \rightarrow$$

$$EH = \frac{2r\ cosA\ cosC}{sen\left(C + \frac{B}{2}\right)}$$

Por otro lado,

$$ER = 2rsen\left(\frac{B}{2} - (90° - A)\right) = 2rsen\left(\frac{A - C}{2}\right).$$

En definitiva,

$$\frac{ER}{EH} = \frac{2rsen\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\frac{2r\ cosA\ cosC}{sen\left(C + \frac{B}{2}\right)}} = \frac{sen\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\frac{cosA\ cosC}{sen\left(C + \frac{B}{2}\right)}} = \frac{sen\left(\frac{A-C}{2}\right)\ sen\left(C + \frac{B}{2}\right)}{cosA\ cosC} = \frac{1}{2}\frac{(\cos(90° - A + C) - cos90°)}{cosA\ cosC}$$

$$\frac{ER}{EH} = \frac{1}{2}\frac{sen(A - C)}{cosA\ cosC} = \frac{1}{2}\frac{(senAcosC - senCcosA)}{cosA\ cosC} = \frac{1}{2}(tanA - tanC)$$

En definitiva,

$$\frac{H_bB^{'}}{H_bH} = \frac{1}{2}(tanA - tanC) = \frac{ER}{EH} \rightarrow \boldsymbol{\frac{H_bB^{'}}{H_bH} = \frac{ER}{EH}}.$$

Por tanto, los triángulos rectángulos $HH_bB^{'}\ y\ HER$ son semejantes y así, en efecto, los puntos $H, R\ y\ B'$ están alineados.