

Problema 854

El triángulo ABC es acutángulo y no isósceles.

Las alturas desde A, AH_a y CH_c se cortan en H.

La bisectriz del ángulo agudo entre las alturas AH_a y CH_c corta al lado AB en P y al lado BC en Q.

La bisectriz interior del ángulo B corta en R a la recta que une el ortocentro H con el punto medio B' del lado AC.

Demostrar que los puntos B,P,R,Q están en una circunferencia.

N. del D. (he añadido alguna cuestión aclaratoria por sugerencias de algún colaborador)

N. del D. (nueva modificación, BC en lugar de AC.)

Bellot, F. (2008): [Revista Escolar de la OIM](#) (Problema 151)

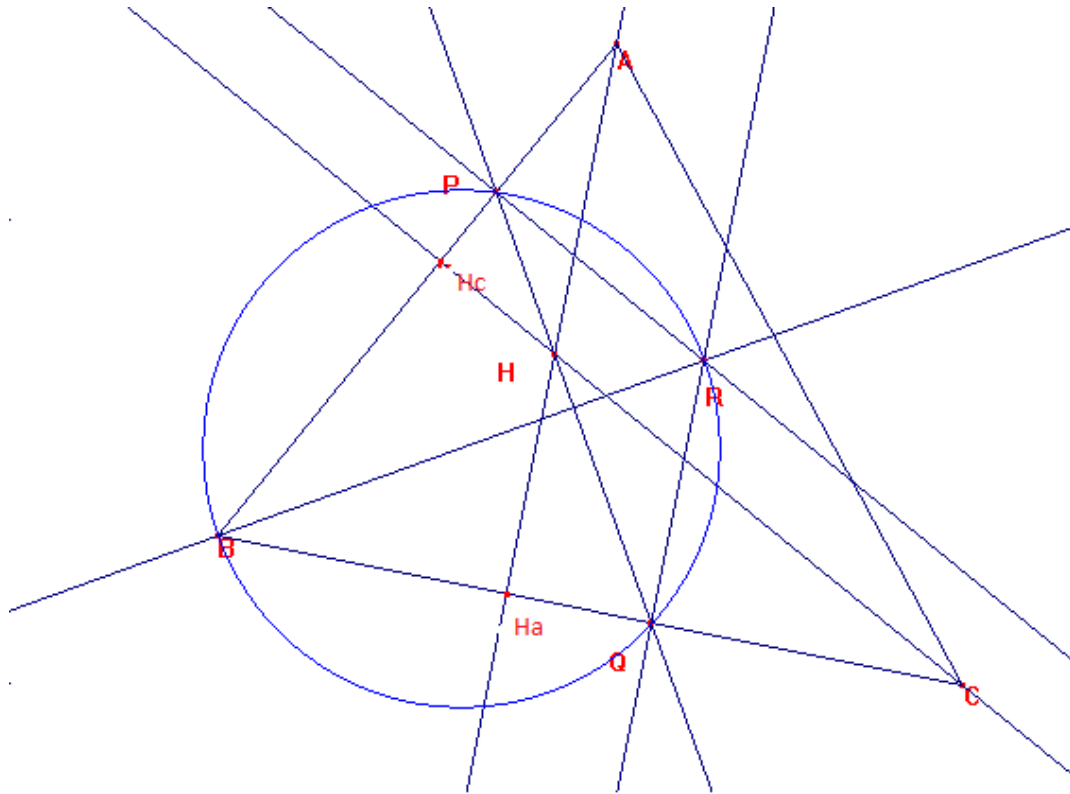
Solución del director

Voy a tratar de estudiar la circunferencia circunscrita a BPQ, y considerar el punto R como el punto en que la bisectriz interior de B la corta. Luego observaré que R se encuentra en la recta H B', como pide el enunciado.

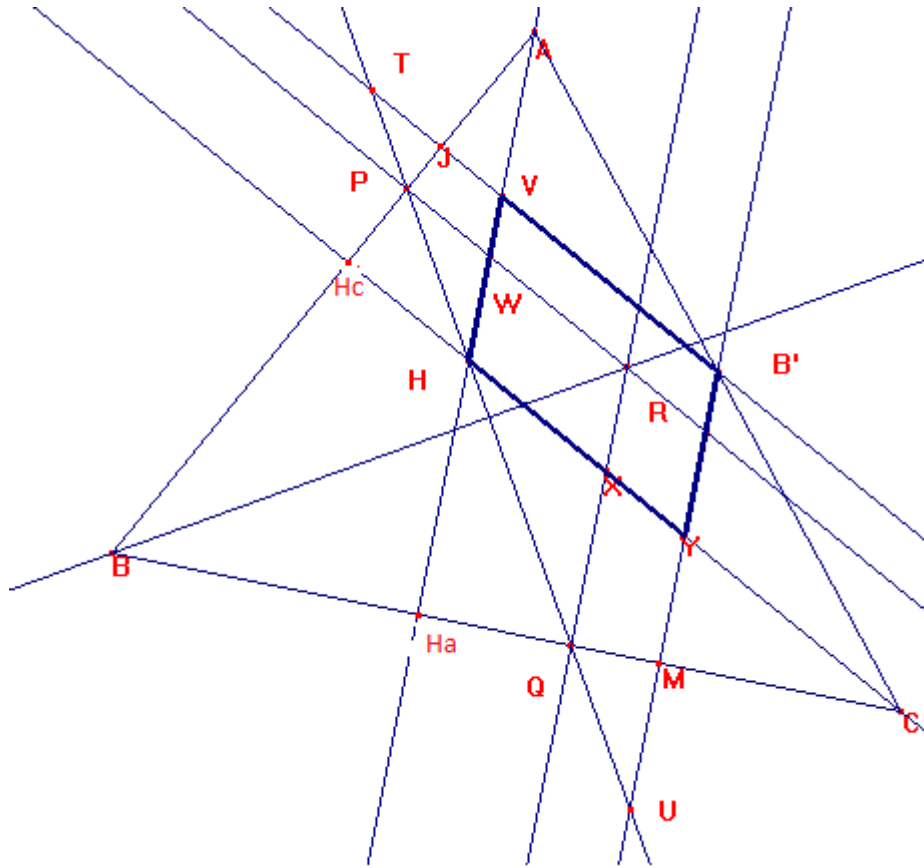
En el triángulo AHK, $\angle HAK = 90^\circ - b$, $\angle AHK = b$. Luego $\angle PHK = b/2$.

En el triángulo CHL, $\angle HCL = 90^\circ - b$, $\angle CHL = b$. Luego $\angle QHL = b/2$.

Al ser BPQ isósceles, el centro de la circunscrita está en la bisectriz de B.



Observemos la circunferencia circunscrita a BPQ:
 Corta a la bisectriz en un punto R.
 Es $\angle RPB = \angle RQB = 90^\circ$



Tracemos por B' las perpendiculares a AB y a BC .

Cortarán a la recta PQ en T y U .

Los triángulos $B'TU$ y RPQ son semejantes.

Los paralelogramos $HVB'Y$ y $HWRX$ son semejantes de ángulos $a+c$ en los vértices B' , R y H , y b en los vértices Y, X, V y W .

Por ello las diagonales son paralelas, siendo HR y HB' segmentos colineales, cqd.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla (España)