

Problema 854

El triángulo ABC es acutángulo y no isósceles.

Las alturas desde A y C, AH_a y CH_c se cortan en H.

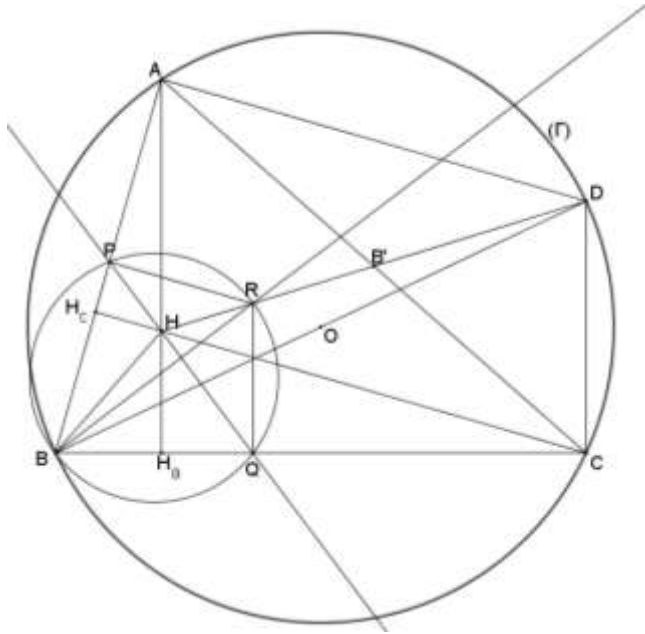
La bisectriz del ángulo agudo entre las alturas AH_a y CH_c corta al lado AB en P y al lado BC en Q.

La bisectriz interior del ángulo B corta en R a la recta que une el ortocentro H con el punto medio B' del lado AC.

Demostrar que los puntos B,P,R,Q están en una circunferencia.

Bellot, F. (2008): [Revista Escolar de la OIM](#) (Problema 151)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soit D le point diamétralement opposé au sommet sur le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

Il est bien connu que :

- D est le symétrique de H par rapport à B' et que le quadrilatère ADCH est un parallélogramme.
- les droites BD et BH sont symétriques par rapport à la bissectrice BR de l'angle $\angle ABC$.

Les triangles rectangles HBH_c et DBC sont semblables. On a donc $BH/BD = BH_c/BC$.

D'après la loi des sinus dans le triangle DBH,

$RH/RD = BH/BD$. D'où $RH/RD = BH_c/BC$.

Par ailleurs la droite PQ bissectrice de l'angle $\angle CHH_a$ et les triangles rectangles AHH_c , CHH_a et CBH_c sont semblables.

D'où $PH_c/AP = QH_a/QC = BH_c/BC = HR/HD$.

Les droites PR et QR sont donc respectivement parallèles à HH_c et HH_a . Les angles $\angle APR$ et

$\angle BQR$ sont donc droits et les quatre points B,P,R et Q sont cocycliques. C.q.f.d.