## Pr. Cabri 855

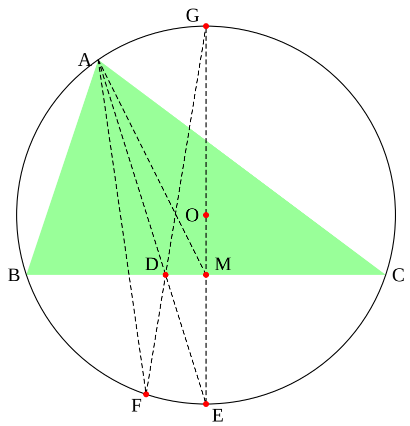
### Enunciado

Sean un triángulo escaleno ABC, Γ el círculo circunscrito a este triángulo y M el centro del lado BC.
La bisectriz del ángulo en A cruza el lado BC en el punto D y el círculo Γ en el punto E
El círculo circunscrito al triangulo DEM intersecta la recta AM en el un segundo punto P y el círculo Γ en un segundo punto Q. Demostrar que el triángulo APQ es isósceles.
Fondanaiche, P. (2017).

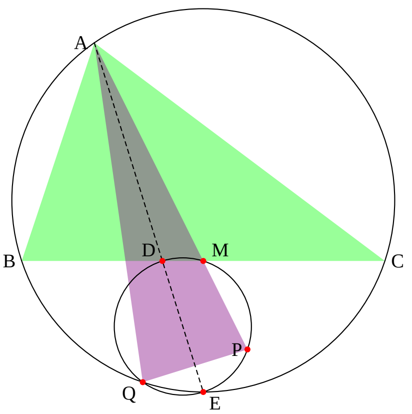
### Soluciones
### por César Beade Franco

#### Solución 1

La bisectriz desde A y la mediatriz de BC se cortan en un punto E del circuncírculo Γ, el punto medio del arco BC. La simediana desde A lo corta en F. Se cumple además que los segmentos AE y FG, siendo E y G diametralmente opuestos, se cortan en D, pie de la bisectriz desde A (1). Así pues los segmentos DME es rectángulo en M y EFD lo es en F, por tanto DMEF está sobre un círculo $\alpha$ de diámetro DE, lo que indica que F es el punto Q del problema.




Por otra parte P está sobre la mediana y sobre $\alpha$, así que su simétrico no es otro que Q ya que ha de estar situado sobre $\alpha$ y sobre la simediana de A.



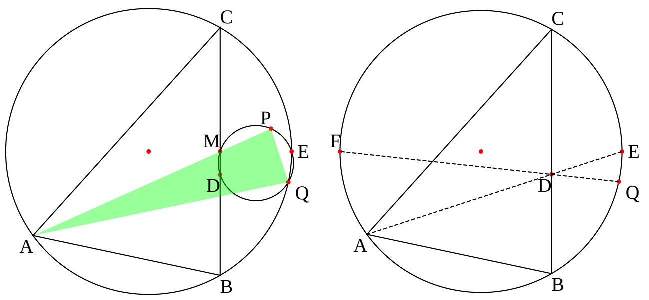

Por tanto el triángulo APQ es isósceles al ser los vértices de la base simétricos respecto a la bisectriz del otro vértice.

(1) Propiedad que demostrada analíticamente en la siguiente solución.

- **Solución 2 (analitica*)**

Consideremos un triángulo con Γ (circuncírculo) de centro (0,0) y radio 1 y vértices A(cos($\pi$ + a),sen($\pi$ + a)), B(cos(-b),sen(-b)) y C(cosb,senb).

Out[266]=




En estas condiciones las coordenadas de los otros puntos M, D y E vienen dadas por M(Cosb,0), D(Cosb, $-2\mathrm{Sen}\frac{b}{2}\mathrm{Tg}\frac{b}{2}$), E(1,0) y el círculo DME tiene centro $(\mathrm{Cos}^2\frac{b}{2}, -\mathrm{Sen}^2\frac{b}{2}\,\mathrm{Tg}\frac{a}{2})$ y radio $\mathrm{Sec}\frac{a}{2}\mathrm{Sen}\frac{b}{2}$. Las intersecciones del circuncírculo con la bisctriz y este círculo nos proporcionan $P(2-\mathrm{Cosa}-\frac{4\,\mathrm{Sen}^2 a}{3+4\,\mathrm{CosaCosb}+\mathrm{Cos2b}},-\frac{4\,(-1+2\,\mathrm{Cosa}+\mathrm{Cosb})\,\mathrm{SenaSen}^2\frac{b}{2}}{3+4\,\mathrm{CosaCosb}+\mathrm{Cos2b}})$ y $Q(\frac{4\,\mathrm{Cosb}+\mathrm{Cosa}\,(3+\mathrm{Cos}[b])}{3+4\,\mathrm{CosaCosb}+\mathrm{Cos2b}},-\frac{2\,\mathrm{Sena}\,\mathrm{Sen}^2 b}{3+4\,\mathrm{CosaCosb}+\mathrm{Cos2b}})$.
Como AE corta diametralmente al círculo DME y PQ es una cuerda del mismo, basta cmprobar que el producto escalar AE.PQ se anula lo que efectivamente sucede.

En relación con la primera solución comprobaremos que la bisectriz AE y el segmento QF, siendo F(-1,0) diametralmente opuesto a E, se cortan en E. Recordemos que Q es el punto en que la simediana de A corta al circuncírculo y D la base de la bisectriz desde A.
Nos basta comprobar la alineación de Q, D y F. Se cumple Det[FD,FQ] = 0.

* Los cálculos se efectuaron con el "*Mathematica*".