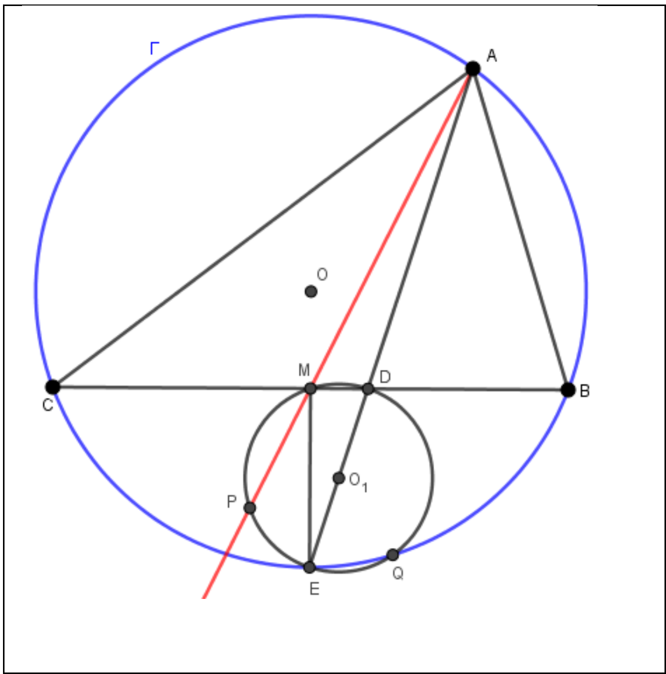
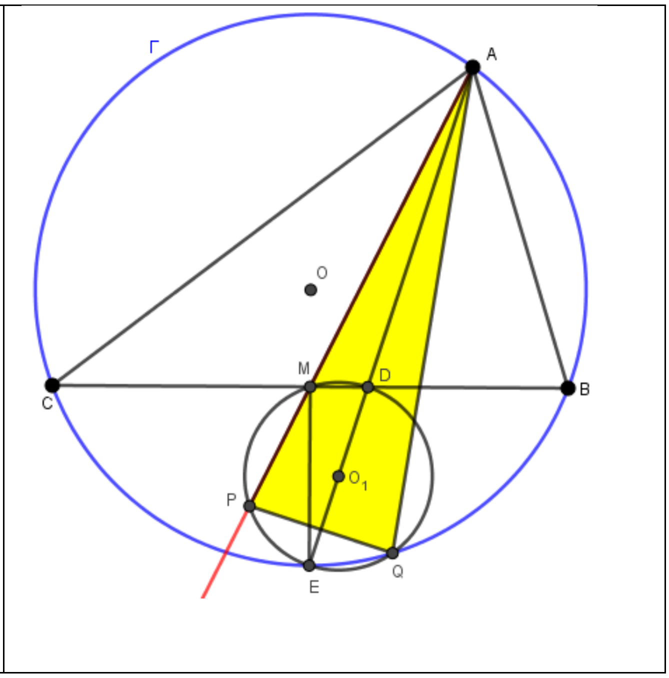
Problema 855.-
Sean un triángulo escaleno ABC , (Γ) el círculo circunscrito a este triángulo y M el centro del lado BC.
La bisectriz del ángulo en A cruza el lado BC en el punto D y el círculo (Γ) en el punto E. El círculo circunscrito al triangulo DEM interseca la recta AM en un segundo punto P y al círculo (Γ) en un segundo punto Q.
Demostrar que el triángulo APQ es isósceles.

Propuesto por Fondanaiche, P. (2017: Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea realizada la construcción según el enunciado.





En primer lugar, observamos que el triángulo DEM es rectángulo en M ya que el punto E es el punto medio del arco CB y así, ME es la mediatriz del segmento BC.

La recta QD es perpendicular al segmento EQ y, por tanto intersecará a la circunferencia Γ en E', punto diametralmente opuesto a E.

Si consideramos ahora el triángulo BQC, resultará por tanto que la recta QE' no será otra que la bisectriz interior correspondiente al vértice Q. Como quiera que interseca al lado B en el punto D, se tendrá que $\frac{QC}{QB} = \frac{CD}{DB}$. Al ser AE la bisectriz interior del triángulo ABC correspondiente al vértice A, e interseca al lado BC en el punto D, verificará por el Teorema de la bisectriz que $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$. En definitiva, $\frac{QC}{QB} = \frac{AC}{AB}$ → El punto Q pertenecerá a la circunferencia de Apolonio ω_A, correspondiente al vértice A del triángulo ABC.
La circunferencia ω_A queda determinada por los puntos $A, D\ y\ Q$. Como A y Q son puntos de la circunferencia Γ, queda probado que la recta AQ no es otra que el eje radical de las circunferencias Γ y ω_A.
Pero si AQ es el eje radical de ambas circunferencia Γ y $\omega_{A,}$ entonces AQ es la simediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC. *(=Vemos esto con mayor detalle en Lema 1).*
Si AQ es la simediana respecto de A, entonces $\measuredangle PAE = \measuredangle QAE$.
Si consideramos el punto P', donde la recta AP corta a Γ, tenemos que los segmento $EP' = EQ$.
Por otro lado, el triángulo EPP' es isósceles, *(=Vemos esto con mayor detalle en Lema 2)*, siendo iguales los ángulos en P y P'. Por tanto tenemos la igualdad $EP' = EP = EQ$.
Finalmente, si $EP = EQ$, entonces $PQ \perp AE \rightarrow\ \Delta APQ\ es\ isósceles.$

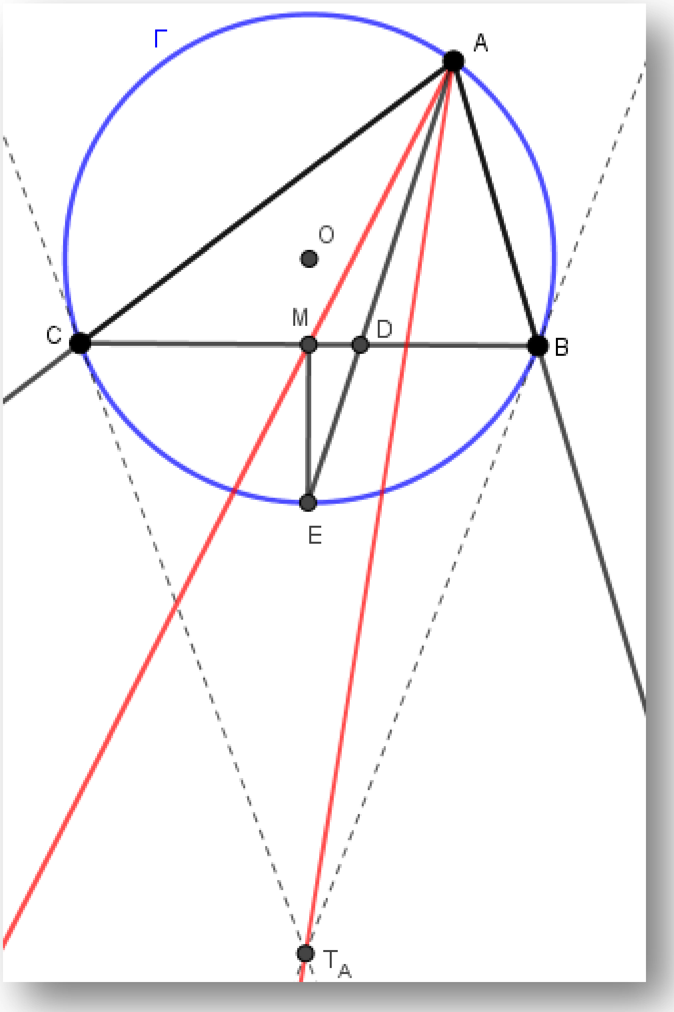
Lema 1.- La simediana correspondiente al vértice A de un triángulo ABC es el eje radical de la circunferencia circunscrita al propio triángulo ABC, Γ y la circunferencia de Apolonio ω_A, asociada al vértice A.

Demostración.-

Hecho 1.-

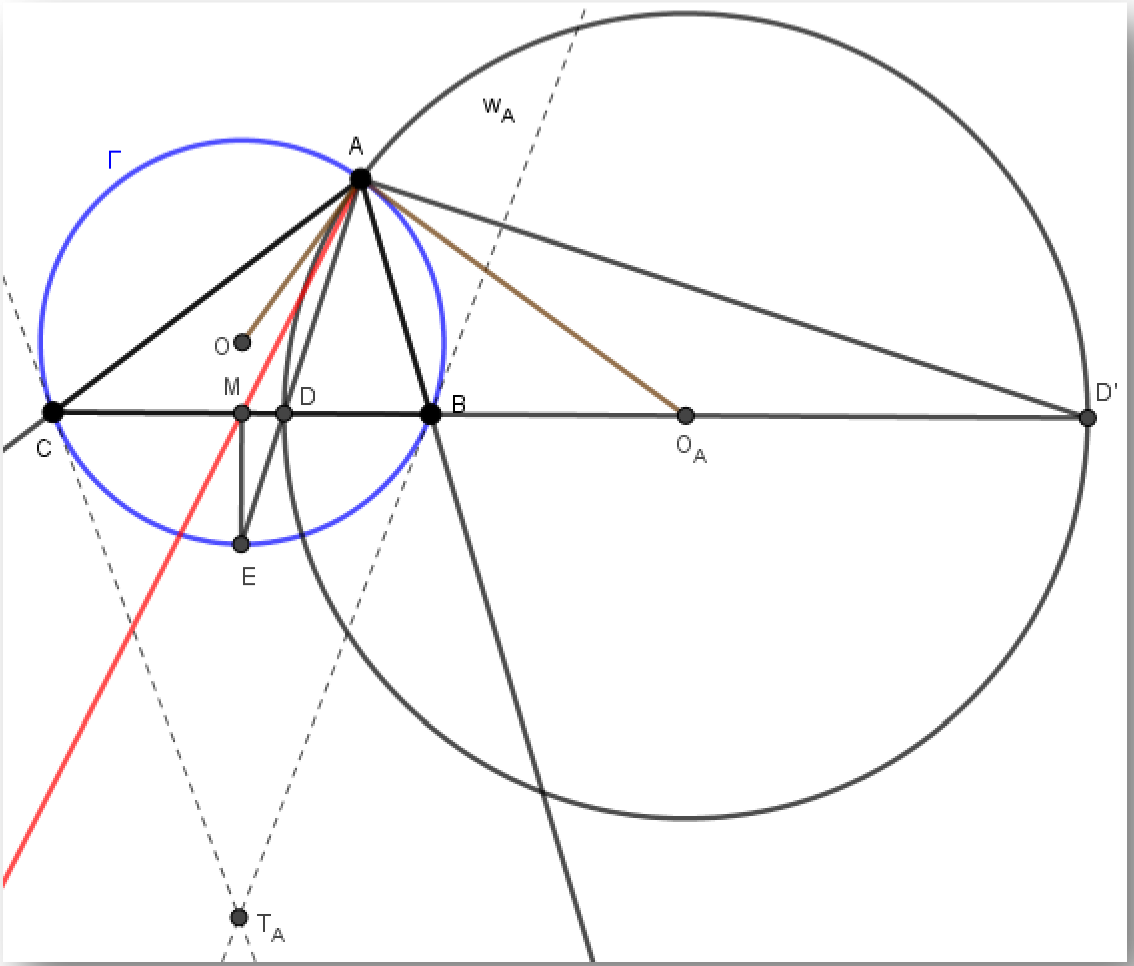
Las tangentes a Γ por los puntos B y C se cortan en el punto T_A. La recta AT_A es la simediana respecto del vértice A.

http://personal.us.es/rbarroso/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol207dam.pdf



Hecho 2.-

Las circunferencias Γ y ω_A son ortogonales.



$$\measuredangle OAO_A = 90°.$$

Para ello, basta observar las siguientes relaciones entre ángulos, $\measuredangle OAO_A = \measuredangle OAD + \measuredangle DAO_A$.

$\measuredangle OAD = \measuredangle OAB - \measuredangle DAB = (90° - C) - \frac{A}{2} = \frac{B-C}{2}$

$\measuredangle DAO = \measuredangle BDA = 180º - \frac{A}{2} - B$

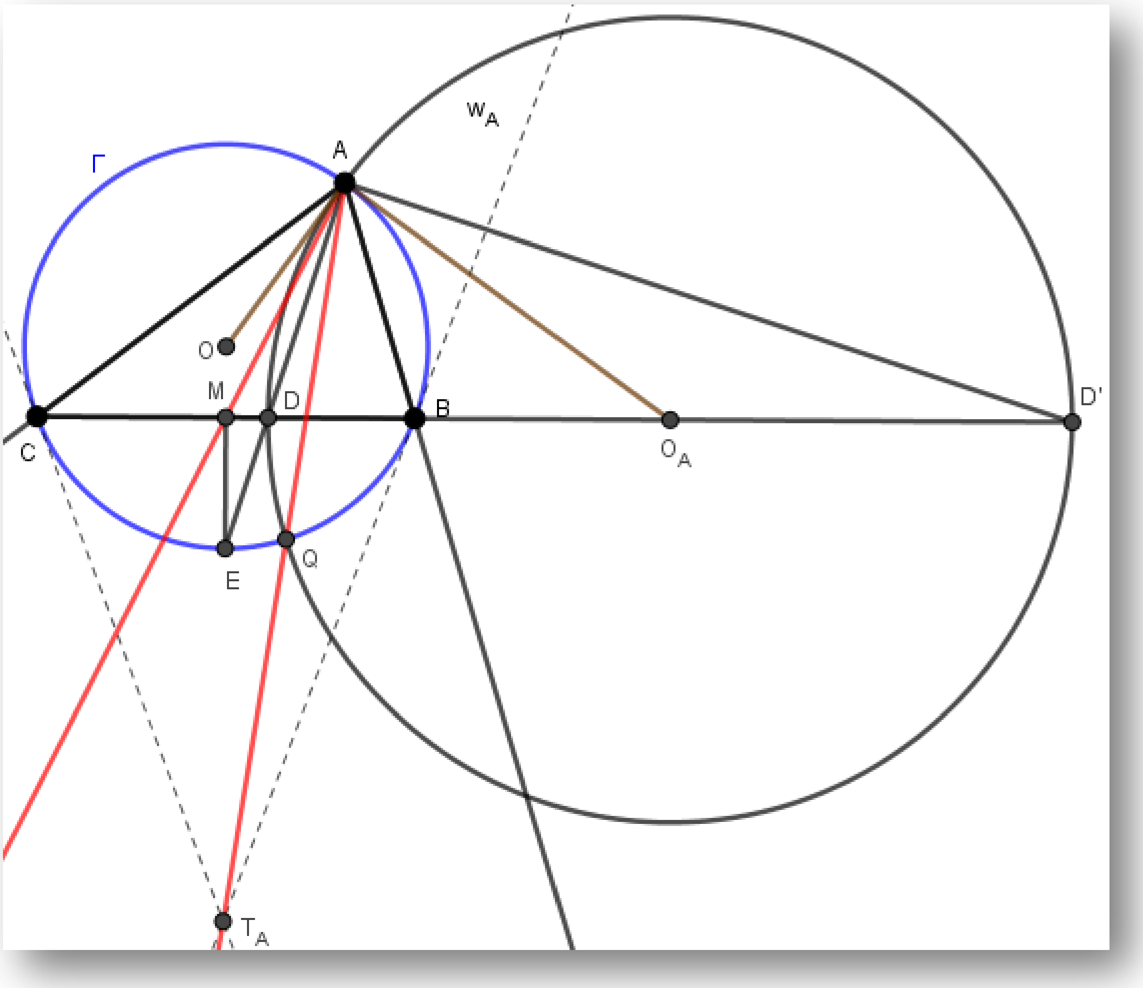
Por tanto,

$\measuredangle OAO_A = \measuredangle OAD + \measuredangle DAO_A = \frac{B-C}{2} + 180° - \frac{A}{2} - B = 180° - \frac{A+B+C}{2} = 90°.$

Hecho 3.-

El eje radical de ambas circunferencias pasa por el punto T_A.

La polar del punto T_A es la recta BC que pasa por O_A, centro de la circunferencia ω_A . Por tanto, la polar de este punto O_A pasará por el punto T_A, pero como ambas circunferencias Γ y ω_A son ortogonales, esta polar será el eje radical de ambas. Por tanto, $A, Q\ y\ T_A$ estarán alineados y, por tanto, dicha recta será la simediana del vértice A en el triángulo ABC.



Lema 2.-

El triángulo EPP' es isósceles.

Demostración.-

Probaremos que los ángulos en los vértices P y P' del triángulo EPP' son iguales.

Para ello,

$\measuredangle P' = \measuredangle AP'E = \measuredangle ACB + \measuredangle EAB$

Por otra parte,

$\measuredangle P = \measuredangle MDE = \measuredangle ACB + \measuredangle EAC$