

Problema 855

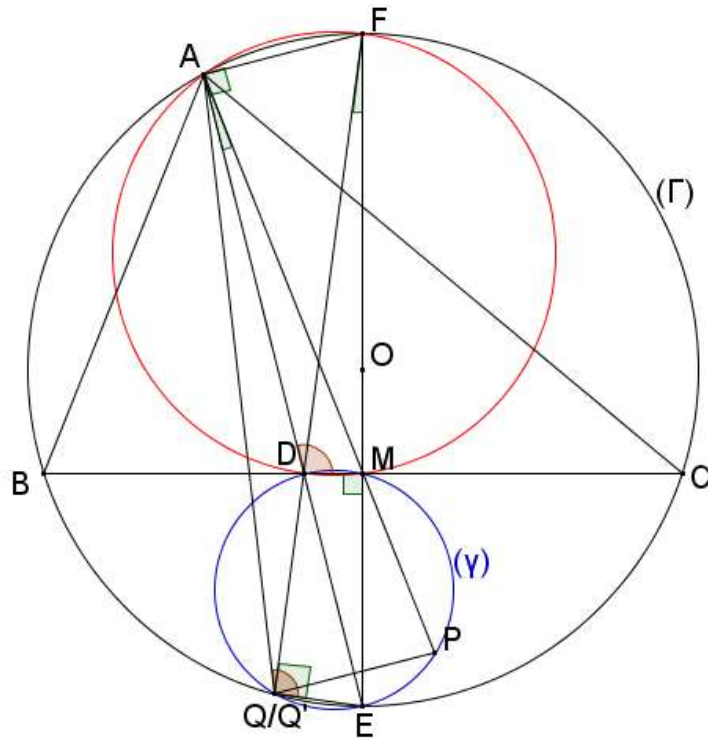
Sean un triángulo escaleno ABC , (Γ) el círculo circunscrito a este triángulo y M el centro del lado BC

La bisectriz del ángulo en A cruza el lado BC en el punto D y el círculo (Γ) en el punto E

El círculo circunscrito al triángulo DEM intersecta la recta AM en el un segundo punto P y el círculo (Γ) en un segundo punto Q .

Demostrar que el triángulo APQ es isósceles.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On trace le point F diamétralement opposé au point E sur le cercle (Γ) . Le point E étant au milieu de l'arc BC qui ne contient pas le sommet A , les trois points E, F et M sont sur la médiatrice du côté BC passant par le centre O de (Γ) .

Comme $\angle DMF = \angle DAF = 90^\circ$, les quatre points A, D, M et F sont cocycliques.

D'où $\angle DAM = \angle DFM$.

On trace la droite FD qui coupe le cercle (Γ) en un point Q' . Comme $\angle DQ'E = \angle DME = 90^\circ$, les quatre points D, M, E et Q' sont sur un même cercle. Le point Q' est donc confondu avec le point Q , deuxième point d'intersection du cercle (γ) circonscrit au triangle DEM avec le cercle (Γ) .

Comme $\angle EAQ = \angle EFQ$, on en déduit $\angle EFQ = \angle DFM = \angle DAM = \angle EAM = \angle EAP$.

D'où $\angle EAP = \angle EAQ$. La droite AD est la bissectrice de l'angle $\angle PAQ$.

Par ailleurs $\angle AQE = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - (180^\circ - \angle ADM) = \angle ADM$.

Les triangles ADM et AQE sont donc semblables. D'où $AD/AM = AQ/AE$ soit $AD.AE = AM.AQ$.

La puissance de A par rapport au cercle (γ) est définie par $AD.AE = AM.AP$

Il en résulte $AM.AQ = AM.AP$.

Conclusion: $AP = AQ$. C.q.f;d.