

Quincena del 16 al 31 de Octubre de 2017.

Propuesto por Philippe Fondanaiche.

Problema 855.- Sean un triángulo escaleno ABC , (Γ) el círculo circunscrito a este triángulo y M el centro del lado BC .

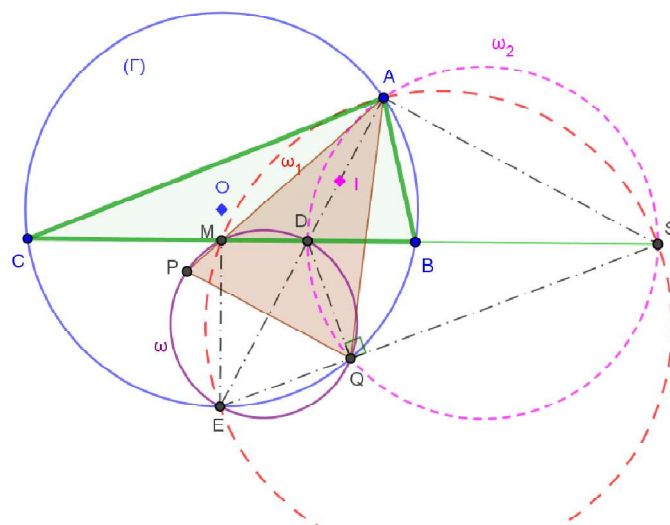
La bisectriz del ángulo en A cruza el lado BC en el punto D y el círculo (Γ) en el punto E .

El círculo circunscrito al triángulo DEM intersecta la recta AM en un segundo punto P y el círculo (Γ) en un segundo punto Q .

Demostrar que el triángulo APQ es isósceles.

Fondanaiche, P. (2017): Comunicación personal

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Vamos a demostrar que la bisectriz de A también lo es del ángulo $\angle PAQ$.

La bisectriz exterior de A corta en S al lado opuesto. Los puntos S, E y Q , están alineados, forman el eje radical de las circunferencias Γ y $\omega = (DEM)$.

En efecto. Los extremos de las bisectrices, D y S separan armónicamente los vértices C y B , por ello si M es el punto medio de BC se tiene que $SM \cdot DM = MB^2$. Tenemos pues:

$$\begin{aligned} \text{Pot}(S, \omega) &= SM \cdot SD = SM \cdot (SM - DM) = SM^2 - SM \cdot DM = SM^2 - MB^2 \\ &= (SM - MB) \cdot (SM + MB) = SB \cdot SC = \text{Pot}(S, \Gamma) \end{aligned}$$

Sea $\omega_1 = (SAE)$ la circunferencia circunscrita a los triángulos rectángulos SAE y SME ; $\omega_2 = (ADS)$ la correspondiente para ADS y QDS . En esta situación tenemos ahora

$$\angle MAE = \angle MSE = \angle DSQ = \angle DAQ$$

Que demuestra que las rectas AP y AQ son *isogonales* (la bisectriz de $\angle PAQ$ es la de $\angle CAB$).

Según Puig Adam, P., *Geometría Métrica*, tomo I, p. 144, **el producto de lados de un triángulo es igual al de los segmentos de dos isogonales concurrentes con ellos y limitados respectivamente por el lado opuesto y por la circunferencia circunscrita.**

Para los segmentos AM y AQ significa $AM \cdot AQ = bc$ (1)

Para AD y AE , tenemos $\text{Pot}(A, \omega) = AD \cdot AE = bc = AM \cdot AP$ (2)

Por tanto de (1) y de (2), $AP = AQ = \frac{bc}{AM} = \frac{bc}{m_a}$, siendo $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$. ■