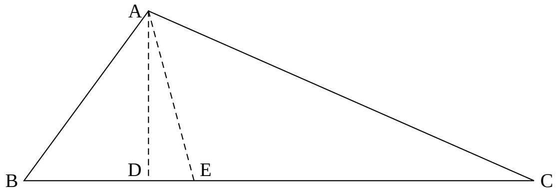
Pr. Cabri 856

Enunciado

Construir un triángulo conociendo b, c y el valor de la diferencia de los ángulos B y C, B - C.
Propuesto por César Beade Franco, profesor de matemáticas jubilado de Cee (La Coruña)

Solución
por César Beade Franco

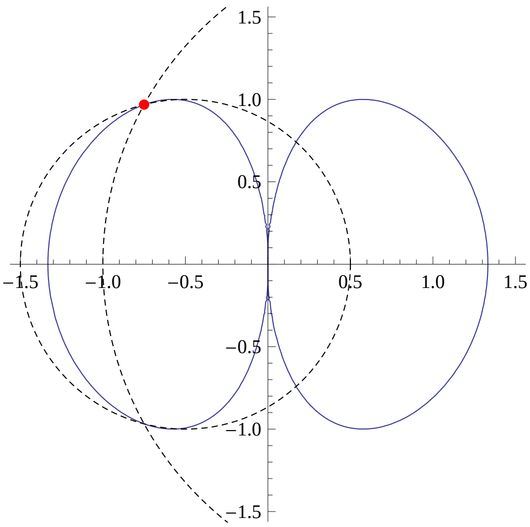
Conocer la diferencia B-C equivale a conocer el ángulo formado por la altura y la bisectriz desde A cuyo valor es la mitad.



EAD = EAB-DAB = EAB-(90°-B) y además
EAD = CAD-CAE = (90°-C) -CAE y sumando ambas igualdades
2EAD = B-C pues EAB = CAE.

Podemos suponer que el lado a está sobre el eje OX y que la bisectriz desde A lo corta en E(0,0). Conocemos también la pendiente m de ésta al conocer el ángulo que forman bisectriz y altura desde A.
Podemos suponer también que los lados b y c miden 1 y k, así que los segmentos que determina la bisectriz sobre el lado a medirán t y kt.
Tomemos los puntos P(-t,0) y Q(kt,0) y determinemos el lugar geométrico de los puntos R(x,y) que dista de esos puntos 1 y k respectivamente, al variar t. Este punto vendrá dado por la intersección de las circunferencias α(P,1) y β(Q,k).

Obtenemos R($\frac{(-1+k)\left(-1+t^2\right)}{2t}$, $\sqrt{k-k\,t^2-\frac{(-1+k)^2\left(-1+t^2\right)^2}{4t^2}}$) que podemos tomar como su ecuación paramétrica. Eliminando t obtenemos la implícita $\left(2+2k^2\right)x^2y^2+\left(1-2k+k^2\right)y^4==x^2\left(4k^2-x^2-2kx^2-k^2x^2\right)$.



La intersección de dicho lugar con la bisectriz y=mx nos da el vértice

$$A = \left(\frac{2k}{\sqrt{(1+m^2)\,(1+m^2-2k\,(-1+m^2)+k^2\,(1+m^2))}},\ \frac{2k\,m}{\sqrt{(1+m^2)\,(1+m^2-2k\,(-1+m^2)+k^2\,(1+m^2))}}\right)$$

En el siguiente dibujo tomamos k=2 (lados b y c de medidas 2,1) y B-C = 30°, por lo que la pendiente de la bisectriz es m = tg105°.