

Problema 857.-

Dado un triángulo ABC , sean O su circuncentro, R su circunradio I su incentro y sean I_A, I_B, I_C los exincentros.

Sea J el circuncentro y σ el circunradio del triángulo I_A, I_B, I_C .

Demostrar que O, I, J están alineados $OJ = OI$, y que $\sigma = 2R$.

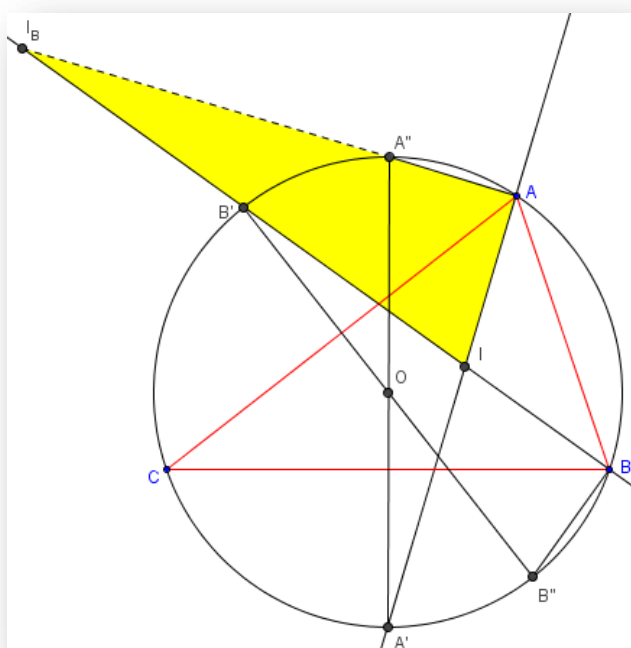
Gallatly, W. (1929): *The modern geometry of triangle*. London: Francis Hodgson, 89 (pag. 1)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sean construidos el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita, Γ de centro O . Observamos que la bisectriz interior en A determina en Γ el punto A' . Este punto pertenece también a la mediatriz del lado BC . Sea I_B , el exincentro respecto del vértice B . Sea también A'' , el punto diametralmente opuesto al punto A' .

Como $AA' \perp AA''$, los puntos A, A'', I_B estarán alineados.

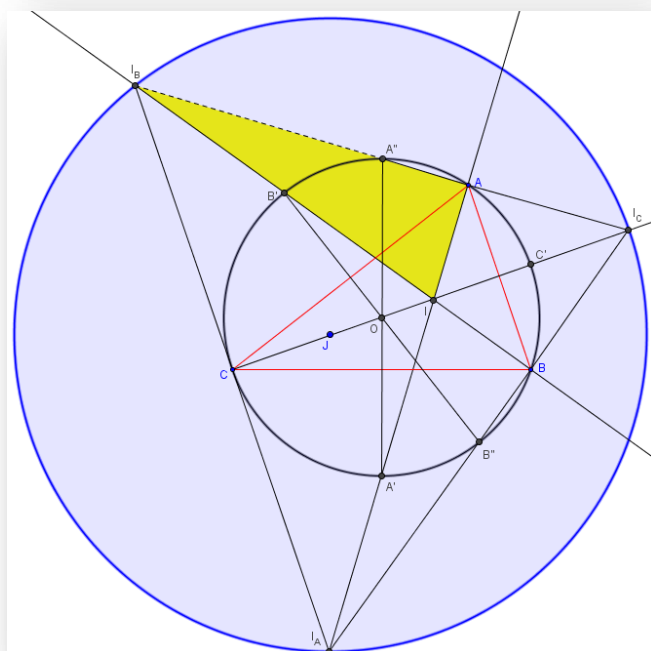
De igual modo, la bisectriz interior en B determinará en Γ el punto B' , estando alineados I, B', I_B .



Si consideramos el triángulo IAI_B , rectángulo en A , tenemos que la medida del ángulo

$$\angle AII_B = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} \text{ y, por tanto el ángulo complementario } \angle AI_BI = \frac{C}{2}.$$

Como quiera que el ángulo $\angle AB'I = \angle C$, resultará pues que el punto B' será el punto medio del segmento II_B . De forma similar, los puntos A' y C' serán los puntos medios de los segmentos II_A y II_C , respectivamente.



Por tanto, la homotecia de centro, el punto I y razón 2, transforma los puntos A', B' y C' de la circunferencia Γ en los puntos I_A, I_B, I_C , y así la circunferencia Γ se transforma en la circunferencia de centro J y radio σ , que circunscribe al triángulo I_A, I_B, I_C . La relación de radios $\sigma = 2R$, resultará evidente así de esta transformación. También lo será que los puntos O, I, J estén alineados y que $OJ = OI$.