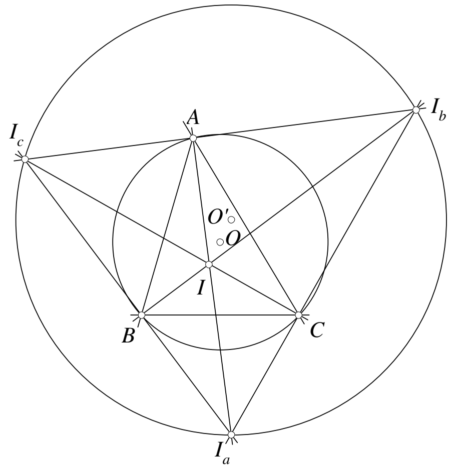
Problema 857 de *triánguloscabri*. *Dado ABC un triángulo ABC con circuncentro O, incentro I, excentros I_a, I_b, I_c y circunradio R, sean O', R' el circuncentro y circunradio del triángulo $I_aI_bI_c$. Demostrar que $IO = OO'$ y que $R' = 2R$.*

Gallatly, W. (1929): *The Modern Geometry of the Triangle.* London: Francis Hodgson, 89 (pag. 1)

Primera solución

La solución este bonito problema se puede basar en relacionar algunos hechos supuestamente conocidos:

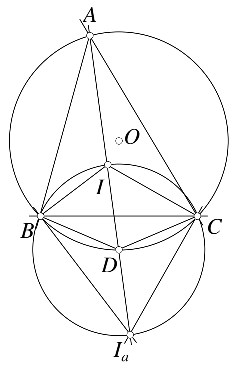


1. Las bisectrices interior e interior de cada ángulo son perpendiculares.
2. Las cuatro bisectrices se cortan en el incentro y los excentros.
3. Por tanto, el incentro I del triángulo ABC es el ortocentro del triángulo $I_aI_bI_c$ y ABC es el triángulo órtico de $I_aI_bI_c$.
4. Por otro lado, también se tiene que en un triángulo cualquiera, la circunferencia circunscrita al triángulo órtico contiene a los puntos medios de los lados y a los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices. Además el centro de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del circuncentro y el ortocentro.
5. Aplicando 3. y 4. resulta entonces que el circuncentro O de ABC, centro de la circunferencia de los nueve puntos de $I_aI_bI_c$ será el punto medio del segmento IO' de extremos el ortocentro y circuncentro de $I_aI_bI_c$ y el circunradio R de ABC será la mitad del circunradio de $I_aI_bI_c$, es decir $R' = 2R$.

Segunda solución

La solución precedente puede considerarse insatisfactoria si nos damos cuenta de que el enunciado propuesto está en la página 1 del libro de Gallatly, y que es previo a la introducción de la circunferencia de los nueve puntos, por lo que por una cuestión de fundamentos debería deberíamos dar una solución que no dependa de la circunferencia de los nueve puntos.

Vamos a usar una bella propiedad que es interesante en sí misma: *El punto medio D en la circunferencia circunscrita a ABC que no contiene a A es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos B, C, I e I_a.*



En efecto, como D es el punto medio del arco BC, se tiene que $DB = DC$.

Además, $\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle BAI + \angle IBA = \angle BID$, por tanto el triángulo BID es isósceles y $DB = DI$.

Por otro lado, tenemos que $\angle BIC = \angle BID + \angle DIC = (\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B) + (\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$, mientras que $\angle BI_aC = 180^\circ - \angle I_aBC - \angle I_aCB = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle B) - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle C) = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$, y por tanto se cumple que $\angle BIC + \angle BI_aC = 180^\circ$, es decir, I_a está sobre la circunferencia BIC.

Volviendo a la figura anterior, si D, E, F son los puntos medios de los arcos BC, CA, AB de la circunferencia circunscrita a ABC que no contienen a A, B, C respectivamente, obtenemos que el triángulo $I_aI_bI_c$ es el resultado de aplicar al triángulo DEF una homotecia de centro I razón 2, lo cual justifica al mismo tiempo que $IO' : IO = 2 : 1$, es decir que $IO = OO'$ y que $R' = 2R$.