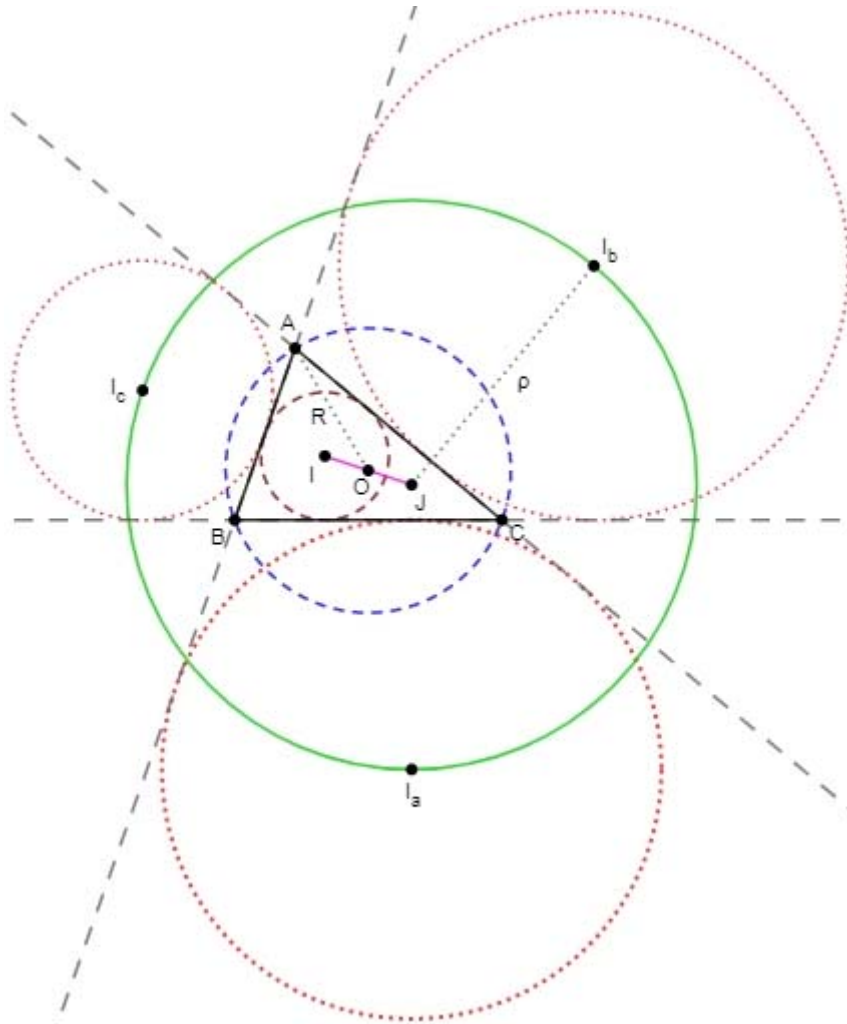


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 857. (Gallatly, W. (1929): The modern geometry of triangle. London: Francis Hodgson, 89, pág. 1)
 Dado un triángulo ABC con incentro I , circuncentro O , excentros I_a, I_b e I_c y circunradio R , se consideran el circuncentro J y el circunradio ρ del triángulo $I_a I_b I_c$. Probar que los puntos O, I y J están alineados, que $OJ = OI$ y que $\rho = 2R$.



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como:

$$\begin{cases} I_a = (-a : b : c) \\ I_b = (a : -b : c) \\ I_c = (a : b : -c) \end{cases}$$

entonces, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $I_a I_b I_c$ es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz + (bcx + acy + abz)(x + y + z) = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$J = (a(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3) : b(-a^3 - a^2b + ab^2 + b^3 + a^2c - 2abc + b^2c + ac^2 - bc^2 - c^3) : c(-a^3 + a^2b + ab^2 - b^3 - a^2c - 2abc - b^2c + ac^2 + bc^2 + c^3))$$

y el cuadrado de su radio:

$$\rho^2 = JI_a^2 = \frac{a^2b^2c^2}{S^2} = 4\left(\frac{abc}{2S}\right)^2 = (2R)^2 \Rightarrow \rho = 2R$$

Además, como:

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{a^2S_A}{a} & \frac{b^2S_B}{b} & \frac{c^2S_C}{c} \\ a(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3) & b(-a^3 - a^2b + ab^2 + b^3 + a^2c - 2abc + b^2c + ac^2 - bc^2 - c^3) & c(-a^3 + a^2b + ab^2 - b^3 - a^2c - 2abc - b^2c + ac^2 + bc^2 + c^3) \end{array} \right| = 0$$

entonces, los puntos $O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, $I = (a : b : c)$ y J están alineados y como los pesos de los puntos I y J son:

$$\begin{cases} I \rightarrow a + b + c \\ J \rightarrow (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c) \end{cases}$$

entonces, el punto medio del segmento IJ es:

$$(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)I + J = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C) = O$$

y, por tanto, $OI = OJ$.