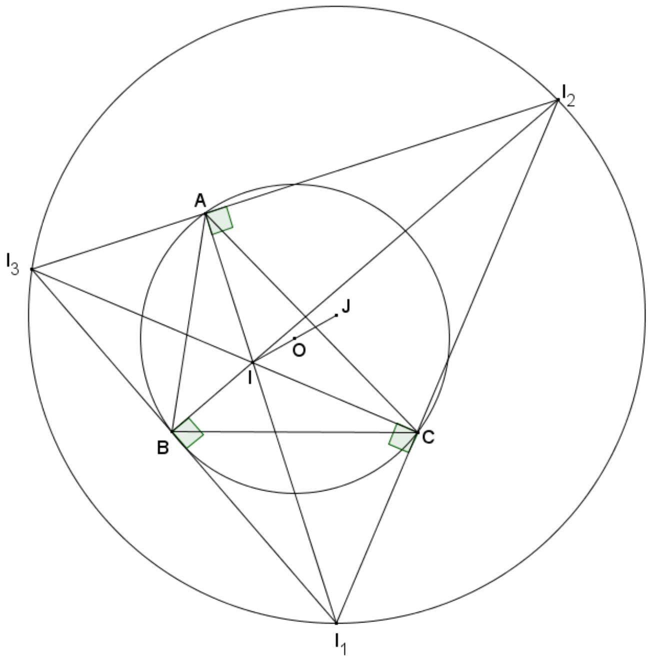
Problema 857

Dado un triángulo ABC, sean O su circuncentro, R su circunradio I su incentro y sean I_1 I_2 I_3 los exincentros. Sea J el circuncentro y σ el circunradio del triángulo I_1 I_2 I_3. Demostrar que O, I , J están alineados, OJ=OI, y que σ=2R.

Gallatly, W. (1929): The modern geometry of triangle. London: Francis Hodgson, 89 (pag. 1)

http://mathworld.wolfram.com/BevanPoint.html (enlace ofrecido por Ángel Montesdeoca, a quien agradezco la referencia)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Les bissectrices intérieures et extérieures des angles en A,B et C du triangle ABC étant perpendiculaires entre elles, le centre I du cercle inscrit du triangle ABC est l'orthocentre du triangle $I_1I_2I_3$.

Le cercle circonscrit au triangle ABC de centre O est donc le cercle d'Euler du triangle $I_1I_2I_3$.

Or dans tout triangle le centre de son cercle d'Euler est aligné avec l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit et se trouve à mi-distance de ces deux points.

Il en résulte que les points O,I et J sont alignés avec OJ = OI.

Les cercles circonscrits aux triangles ABC et $I_1I_2I_3$ sont homothétiques l'un de l'autre par une homothétie de centre I et de rapport IJ/IO =2. On a donc σ=2R