

■ Enunciado

Dado un triángulo escaleno, se consideran sus circunferencias circunscrita C , inscrita T y la de los nueve puntos, N .

A) Hallar los centros y radios de las circunferencias tangentes interiores a C y exteriores a T que tienen el mayor y menor radio.

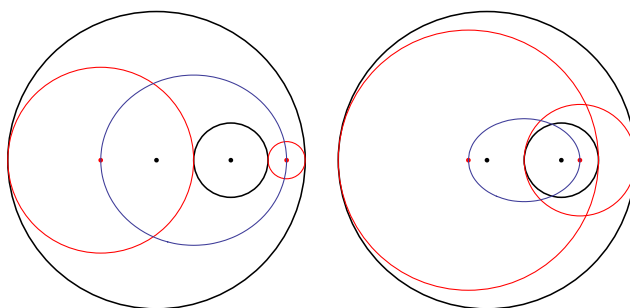
B) Hallar los centros y radios de las circunferencias tangentes interiores a C y exteriores a N que tienen el mayor y menor radio. (Propuesta del director)

■ Solución
por César Beade Franco

Dadas dos circunferencias de radios R y r ($R > r$), una interior a otra, hay dos familias de circunferencias tangentes a ambas cuyos centros están situados sobre sendas elipses de focos los centros de dichas circunferencias. Sus ejes mayores miden $R+r$ en un caso y $R-r$ en el otro.

Dibujo 1

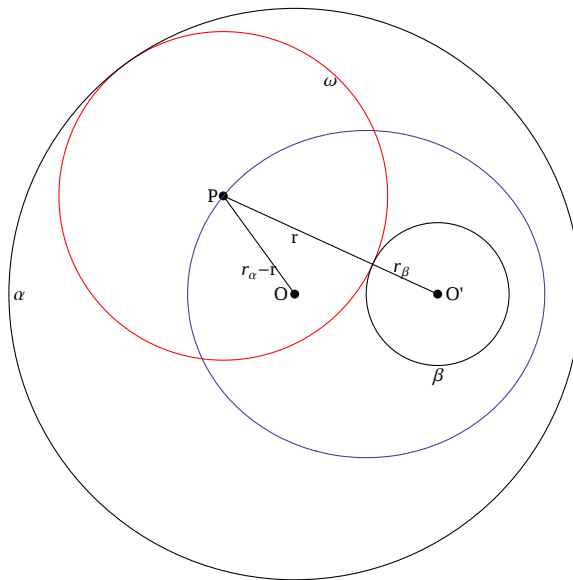
Out[251]=



Las circunferencias tangentes alcanzan su mayor o menor tamaño cuando sus centros se sitúan en los extremos de las elipses, lo que implica la alineación de todos ellos.

El Dibujo 2 nos aclara esto. El radio r de la tangente ω es $PO' - r_\beta$ (o $PO' + r_\beta$, para el dibujo 1 derecho) y como r_β es fijo y al estar P sobre una elipse de focos O y O' , PO' es mínimo (o máximo) en sus extremos.

Dibujo 2

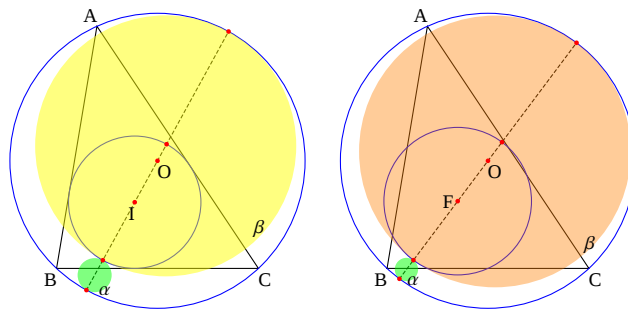


Out[243]=

Si llamamos K y k a los radios de la mayor y menor, respectivamente y d a la distancia entre los centros, en el dibujo izquierdo, $f = \frac{R-r-d}{2}$ y $F = \frac{R-r+d}{2}$. Para el dibujo derecho, llamando a los radios k' y K' tenemos $K' = \frac{R+r-d}{2}$ y $k' = \frac{R+r+d}{2}$.

En la situación anterior se encuentran C y T , así como C y N si el triángulo es acutángulo. Las buscadas son la menor de la primera familia y la mayor de la segunda. En ambos casos los cuatro centros están alineados lo que permite dibujarlas fácilmente.

Dibujo 3



Out[264]=

Si el triángulo es rectángulo, en el caso de las tangentes a C y N , la circunferencia pequeña se reduce a un punto y la mayor coincide con C .

Si el triángulo es obtusángulo, de nuevo la menor se reduce a un punto (en realidad a dos), intersección de ambas circunferencias. La mayor cambia de posición, como vemos en el próximo dibujo.

Dibujo 4

Out[271]=

