Problema 858.-

Dado un triángulo escaleno, se consideran sus circunferencias circunscrita C, inscrita T y la de los nueve puntos, N.

a) Hallar los centros y radios de las circunferencias tangentes interiores a C y exteriores a T que tienen el mayor y menor radio.

b) Hallar los centros y radios de las circunferencias tangentes interiores a C y exteriores a N que tienen el mayor y menor radio. (Propuesta del director)

Referencia desconocida.

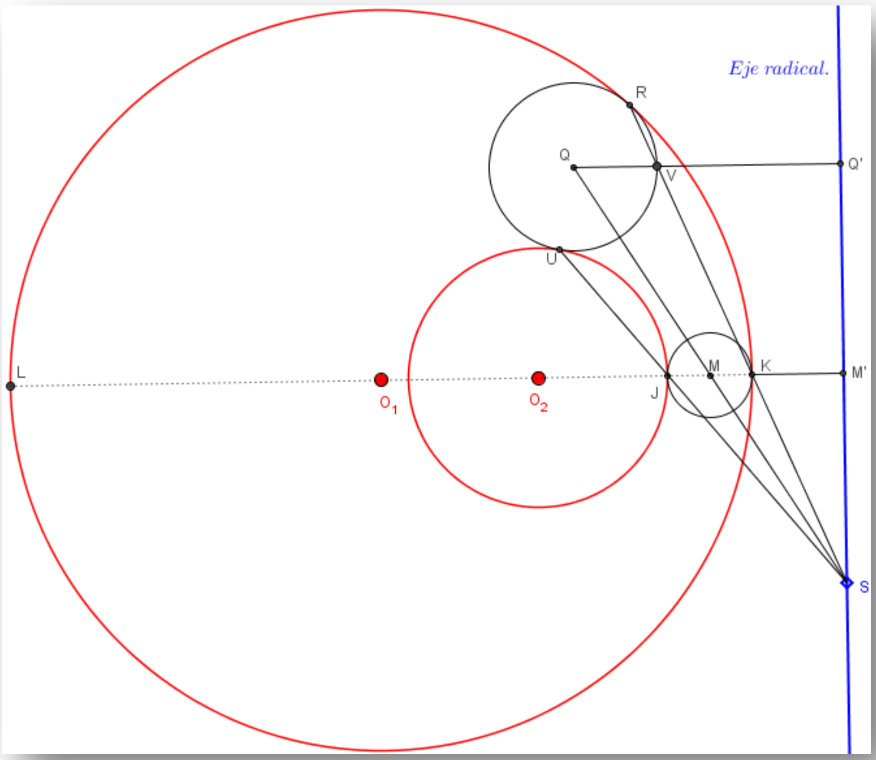
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea la siguiente Proposición que nos conduce de un modo inmediato a la solución del problema dado.

Proposición.-

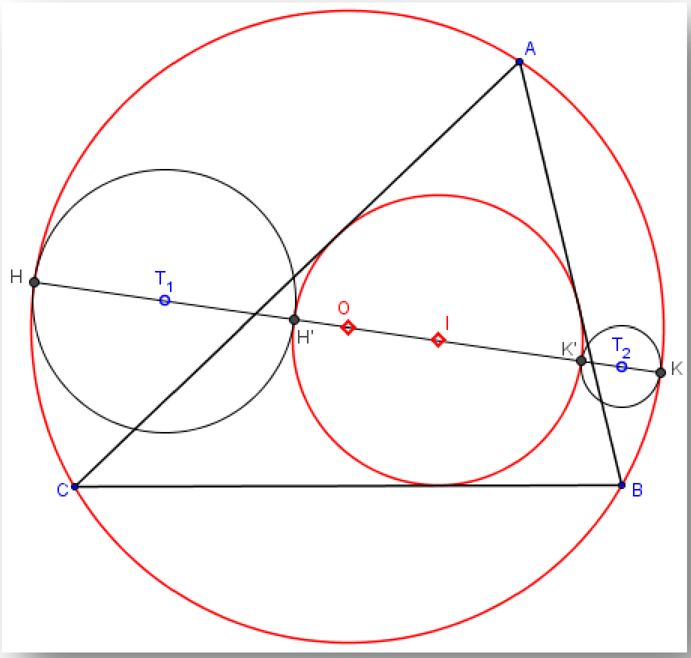
Si una circunferencia variable es tangente a dos circunferencias fijas, su radio mantiene una razón constante sobre la perpendicular trazada desde el centro hasta le eje radical de aquellas primeras.

Demostración.- Sean los centros $O_1\ y\ O_2$ de las circunferencias fijas dadas. Sea el eje radical de ambas circunferencias. Trazamos el diámetro común a ellas designando por L y K a los puntos de intersección con la circunferencia exterior.



Sabemos que S, centro de similitud directa de cualesquiera dos circunferencias que sean tangentes a las dadas pertenece al eje radical de ambas (Teorema de tangencia de D'Alambert). Por tanto, si trazamos la perpendicular QQ' al eje radical, podemos entonces considerar las siguientes relaciones: $\frac{MM'}{QQ'} = \frac{MS}{QS} = \frac{MK}{QV} = \frac{r_1}{r_2}$.

Por tanto, para nuestro propósito, los puntos que nos darán la circunferencia de contacto de radio mayor y menor serán los puntos diametralmente opuestos que se encuentren a la mayor y menor distancia al eje radical del par de circunferencias en cada caso.



Designamos por HK al diámetro de la circunferencia C que pasa por el Incentro I.

Este diámetro cortaría a la circunferencia inscrita T en los puntos H’ y K’.

Los centros $T_1 \ y \ T_2$ estarían determinados por ser, respectivamente, los puntos medios de los segmentos HH’ y KK’.

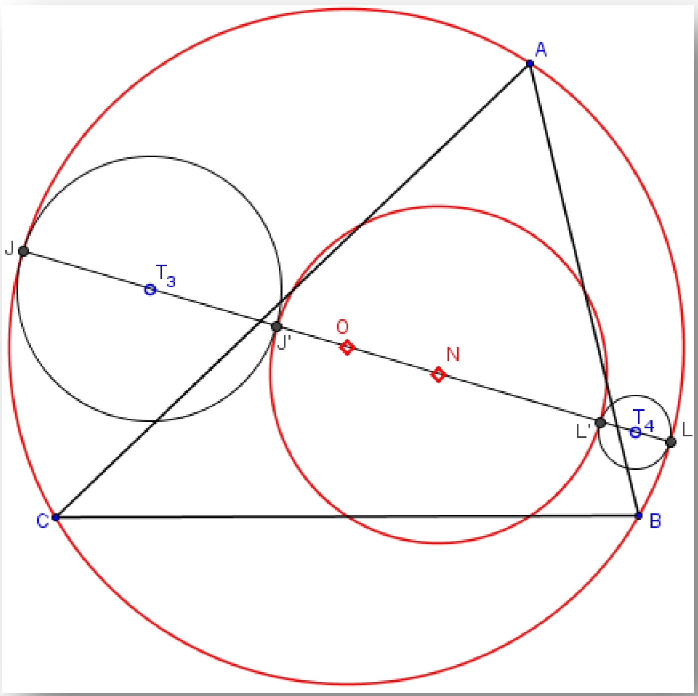
Sus respectivos radios serían

$$s_1 = \frac{R-r+IO}{2} \ y$$

$$s_2 = \frac{R-r-IO}{2}, siendo \ s_1 > s_2.$$

Bastaría sustituir en las anteriores expresiones el valor de IO

$IO^2 = R^2 - 2Rr$.



Designamos por JL al diámetro de la circunferencia C que pasa por el centro de la circunferencia N.

Este diámetro cortaría a la circunferencia N en los puntos J’ y L’.

Los centros $T_3 \ y \ T_4$ estarían determinados por ser, respectivamente, los puntos medios de los segmentos JJ’ y LL’.

Sus respectivos radios serían

$$s_3 = \frac{\frac{R}{2}+NO}{2} \ y$$

$$s_4 = \frac{\frac{R}{2}-NO}{2}, siendo \ s_3 > s_4.$$

Hemos tendido en cuenta que la circunferencia N tiene de radio $r = \frac{R}{2}$.