

Problema 858

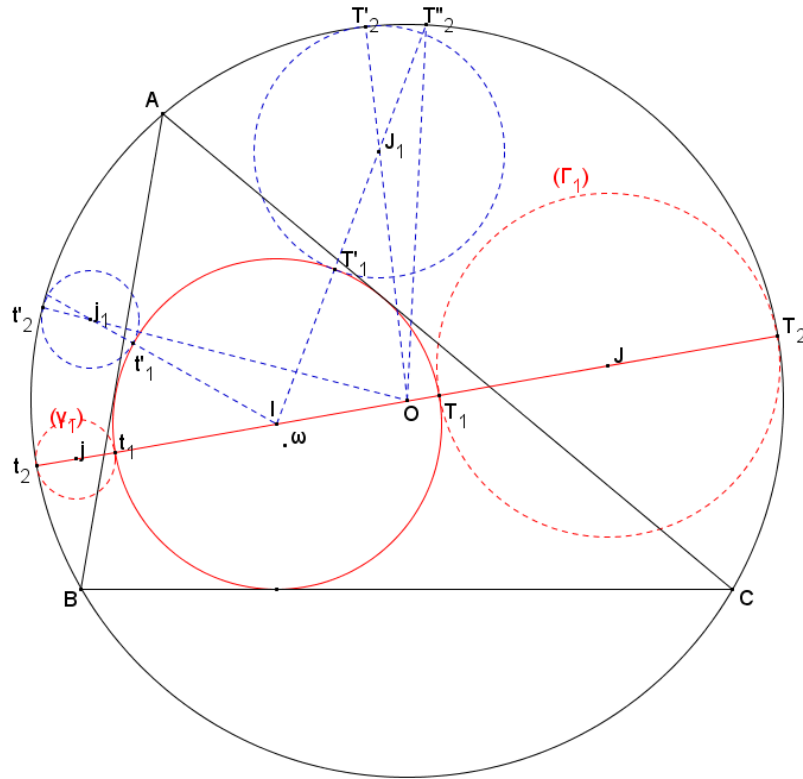
Dado un triángulo escaleno, se consideran sus circunferencias circunscrita C, inscrita T y la de los nueve puntos, N.

A) Hallar los centros y radios de las circunferencias tangentes interiores a C y exteriores a T que tienen el mayor y menor radio.

B) Hallar los centros y radios de las circunferencias tangentes interiores a C y exteriores a N que tienen el mayor y menor radio. (Propuesta del director)

Referencia desconocida.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soit un triangle scalène défini par ses trois côtés $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.
 O est le centre du cercle circonscrit, I est le centre du cercle inscrit et ω est le centre du cercle d'Euler.

On désigne par s le demi-périmètre, Δ l'aire du triangle, R le rayon du cercle circonscrit et r le rayon du cercle inscrit.

Les points O, I et ω sont déterminés par les distances $OI, \omega I$ et $O\omega$.

$$s = (a + b + c)/2$$

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)s(s-b)s(s-c)}$$

$$R = abc/4\Delta$$

$$r = \Delta/s$$

$$d = OI = \sqrt{R(R-2r)}$$

$$\omega I = R/2 - r$$

$$O\omega = \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

A) On désigne par (γ_1) et (Γ_1) les cercles de plus petit rayon et de plus grand rayon tangents intérieurement au cercle circonscrit et extérieurement au cercle inscrit. Le cercle (Γ_1) tangent en T_1 au cercle inscrit et en T_2 au cercle circonscrit a son centre J situé sur la droite OI et son rayon est égal à $(R - r + d)/2$ tandis que le cercle (γ_1) tangent en t_1 au cercle inscrit et en t_2 au cercle circonscrit a son centre J_1 aussi situé sur la droite OI et son rayon est égal à $(R - r - d)/2$. Voir les cercles en pointillés rouges dans la figure ci-dessus.

Démonstration:

1) $JT_1 = JT_2 = (R - r + d)/2$ est maximal.

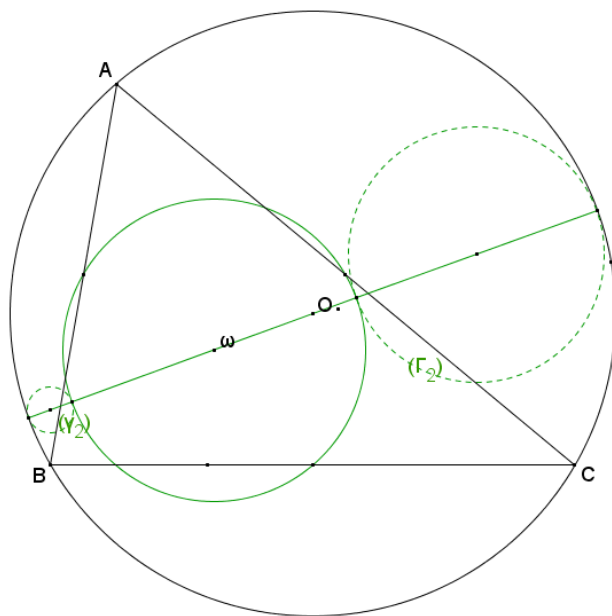
Soit le cercle (en pointillés bleus) de centre J_1 distinct de J et de rayon ρ tangent en T'_1 au cercle inscrit et en T'_2 au cercle circonscrit. La droite IJ_1 coupe le cercle circonscrit en T''_2 . On a $IJ_1 + \rho = r + 2\rho < IT''_2$. Or $IT''_2 \leq IO + OT''_2 = d + R$. On en déduit $\rho \leq (R - r + d)/2$. C.q.f.d.

2) $j_{t_1} = j_{t_2} = (R - r - d)/2$ est minimal.

Soit le cercle (en pointillés bleus) de centre j_1 distinct de j et de rayon ρ' tangent en t'_1 au cercle inscrit et en t'_2 au cercle circonscrit.

On a $\rho' = j_1 t'_1 = j_1 t'_2$. Comme $Ij_1 + IO > Oj_1 = Ot'_2 - j_1 t'_2$, on en déduit $r + \rho' + d \geq R - \rho'$ soit $\rho' \geq (R - r - d)/2$. C.q.f.d.

B) On désigne par (γ_2) et (Γ_2) les cercles de plus petit rayon et de plus grand rayon tangents intérieurement au cercle circonscrit et extérieurement au cercle des neuf points d'Euler. Voir les cercles en pointillés verts dans la figure ci-après



Leurs centres sont situés sur la droite $O\omega$ et leurs rayons sont respectivement égaux à $(R - r - O\omega)/2$ et $(R - r + O\omega)/2$

La démonstration est rigoureusement la même que précédemment.