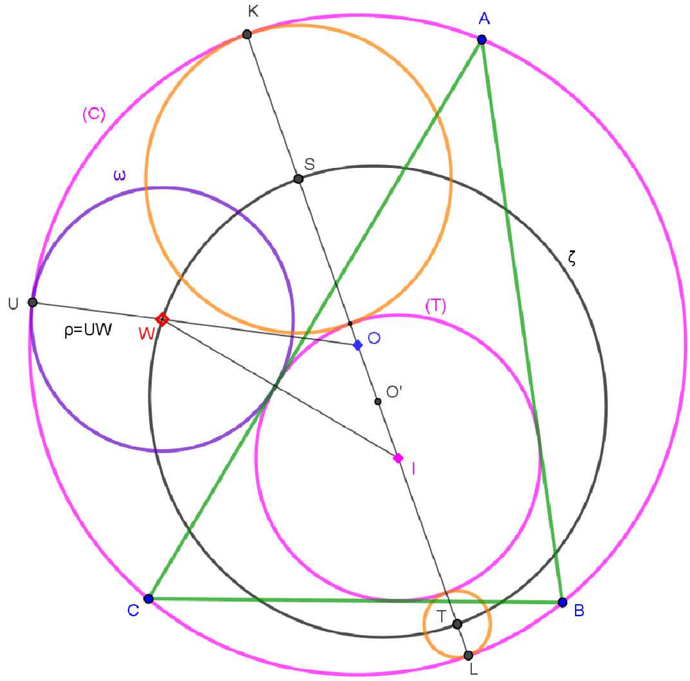
Quincena del 16 al 20 de Noviembre de 2017.

***Problema* 858**.- *Dado un triángulo escaleno, se consideran sus circunferencias circunscrita C, inscrita T y la de los nueve puntos, N.*

A) Hallar los centros y radios de las circunferencias tangentes interiores a C y exteriores a T que tienen el mayor y menor radio.

B) Hallar los centros y radios de las circunferencias tangentes interiores a C y exteriores a N que tienen el mayor y menor radio. (Propuesta del director)
Referencia desconocida.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea $\omega = (W; \rho)$ una circunferencia de centro W y radio ρ que cumple las exigencias del problema. Estas condiciones implican que el segmento OW sea de longitud $R - \rho$ y el segmento IW de longitud $r + \rho$, siendo R y r los radios de las circunferencias de centros O e I respectivamente. Lo que equivale a decir que el punto W es tal que la suma de distancias a los tros O e I es la cantidad $R + r$, constante**: $\boldsymbol{W}$ yace en una elipse $\boldsymbol{\zeta}$ de focos $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{I}$ y eje mayor o focal $\boldsymbol{R + r}$.** O', punto medio de OI, es el centro de esta elipse, $O'S = O'T = \frac{R+r}{2}$.
El segmento IW tendrá longitud máxima o mínima cuando W coincida con uno de los vértices de esta elipse, el punto S o el punto T y entonces el radio ρ también será máximo o mínimo. Llamando d a la distancia entre los centro O e I, tenemos

$$SK = OK - OS = R - (O'S - O'O) = R - \frac{R+r}{2} + \frac{d}{2} = \frac{R-r}{2} + \frac{d}{2}$$

Análogamente calculamos $TL = \frac{R-r}{2} - \frac{d}{2}$. Así pues tenemos $\rho \in \left[\frac{R-r}{2} - \frac{d}{2}, \frac{R-r}{2} + \frac{d}{2}\right]$.
A) En este caso r es el radio de la circunferencia inscrita, R el de la circunscrita y d, según el teorema de Euler es $d = \sqrt{R^2 - 2rR}$.

B) En este caso R es el mismo y $r = \frac{R}{2}$, ahora $d = \frac{OH}{2} = \frac{3}{2}OG = \frac{3}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}} = \frac{1}{2}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$ y $\frac{R-r}{2} = \frac{3}{4}R$ ■