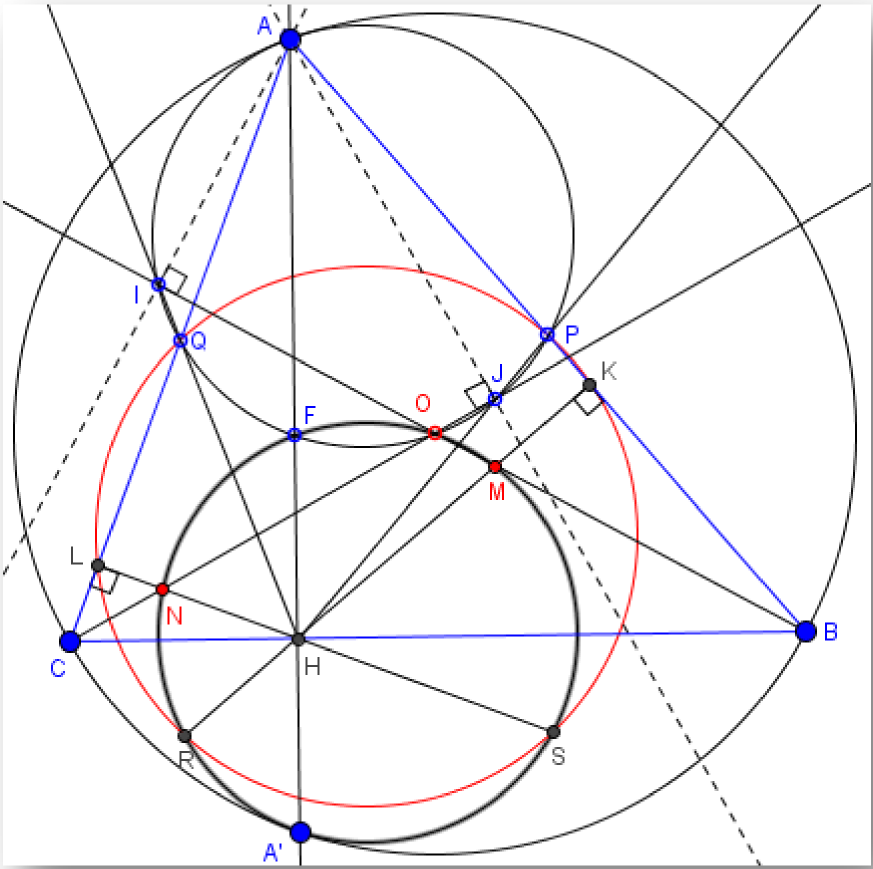
Problema 859.-
En un triángulo acutángulo ABC, se consideran:
El centro O del círculo circunscrito, la altura AH, las proyecciones I y J de A sobre las rectas BO y CO,
las proyecciones K y L de H sobre los lados AB y AC,
La recta HJ corta el lado AB al punto P y la recta HI corta el lado AC al punto Q.
La recta HK corta la recta BO al punto M y la recta HL corta la recta CO al punto N
El círculo circunscrito al triángulo OMN corta la recta HK en el segundo punto R y la recta HL en el segundo punto S.
Demostrar que los cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo círculo.

Fondanaiche, P. (2017): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Consideramos en primer lugar S_1, la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $AIOJ$. Esta circunferencia tiene



como diámetro el segmento AO. Por tanto, el radio de la misma es $\frac{R}{2}$, siendo R =radio de S, la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.
Por ser AIHB concíclicos, se tendrá que
$\measuredangle OBA = 90° - C \rightarrow$
$\measuredangle AHI = 90° - C$.
Entonces el punto Q ha de ser el punto medio del lado AC.
Razonando de igual manera, P deberá ser el punto medio del lado AB. Además, estos puntos medios, P y Q habrán de pertenecer a esta circunferencia de diámetro AO.
Designamos por $F\ y\ A'$ a los puntos donde la altura AH intercepta a las circunferencias $S_1\ y\ S$, respectivamente. Por tanto F será el punto medio del segmento AA'.
La circunferencia S_2 que circunscribe al triángulo rectángulo OFA' tendrá de radio $\frac{R}{2}$, igual que la S_1.
Como quiera que $\measuredangle IOJ = \measuredangle MON \rightarrow\ \measuredangle MA'N = \measuredangle JAI$ y, por tanto, $A'N\ y\ A'M$ son paralelas respectivamente a $AJ\ y\ AI$. En definitiva, los puntos M y N pertenecen a la circunferencia S_2. Por otra parte, por la simetría de la construcción, los puntos R y S serán los puntos medios de los lados A'C y A'B, respectivamente. Este hecho trae consigo que el lado RS es la paralela media del lado BC al igual que lo era el segmento PQ.
Además $QR \perp RS \rightarrow$ El cuadrilátero PQRS es un rectángulo y, por tanto inscriptible.