Propuesto por Philippe Fondanaiche.

Problema 859

En un triángulo acutángulo ABC, se consideran:

- el centro O del círculo circunscrito,
- la altura AH,
- las proyecciones I y J de A sobre las rectas BO y CO,
- las proyecciones K y L de H sobre los lados AB y AC,

La recta HJ corta el lado AB al punto P y la recta HI corta el lado AC al punto Q.

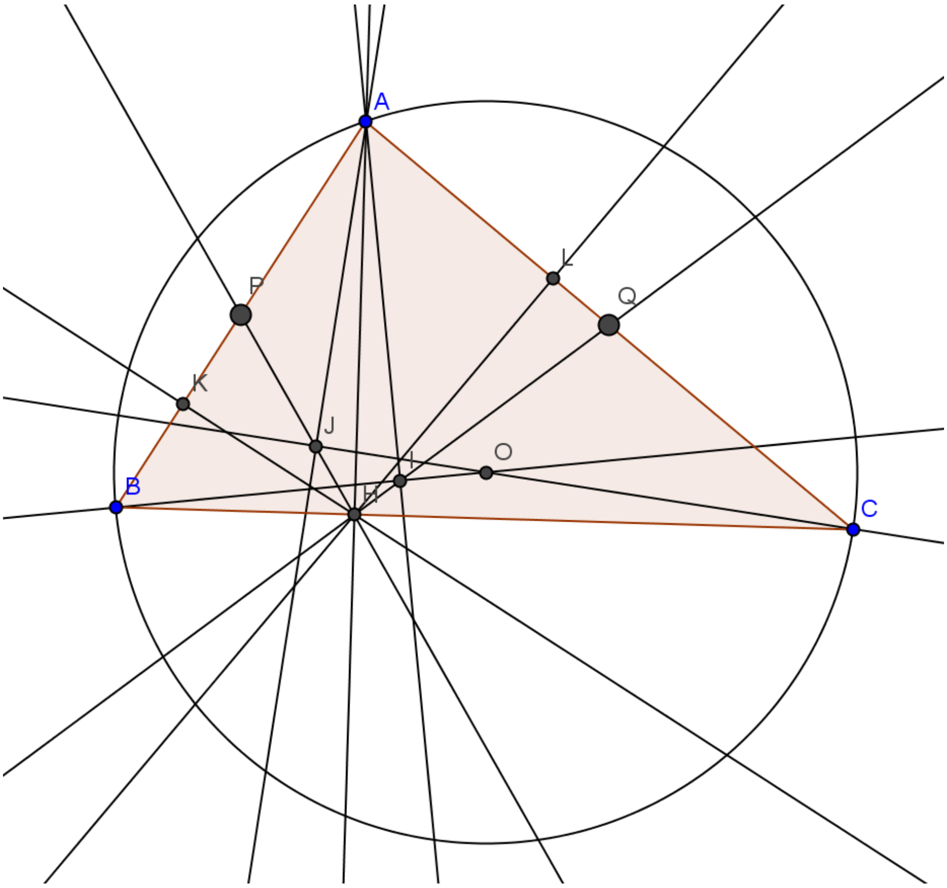
La recta HK corta la recta BO al punto M y la recta HL corta la recta CO al punto N

El círculo circunscrito al triángulo OMN corta la recta HK en el segundo punto R y la recta HL en el segundo punto S.

Demostrar que los cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo círculo.

Fondanaiche, P. (2017): Comunicación personal.

Solución del director.



Analicemos la construcción de P:

El triángulo AHB tiene de ángulos 90-β, 90, β.

Al ser los puntos AJHC concíclicos, el ángulo $\angle AHJ = \angle ACJ = \angle ACO = 90 - \beta$

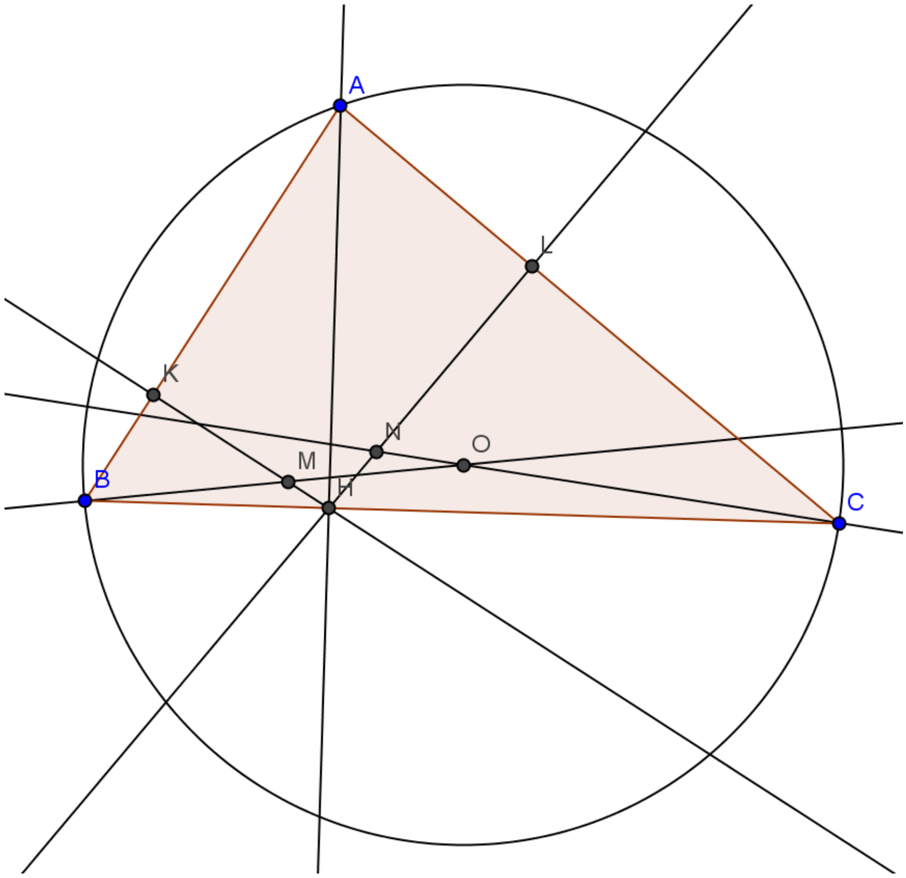
Por ello, el triángulo AHP es isósceles, 90-β, 90-β, 2β.

El triángulo HPB es también isósceles, con β, 180-2β, β.

Es decir, P es el punto medio de AB.

Por consideraciones análogas, Q es el punto medio de AC.

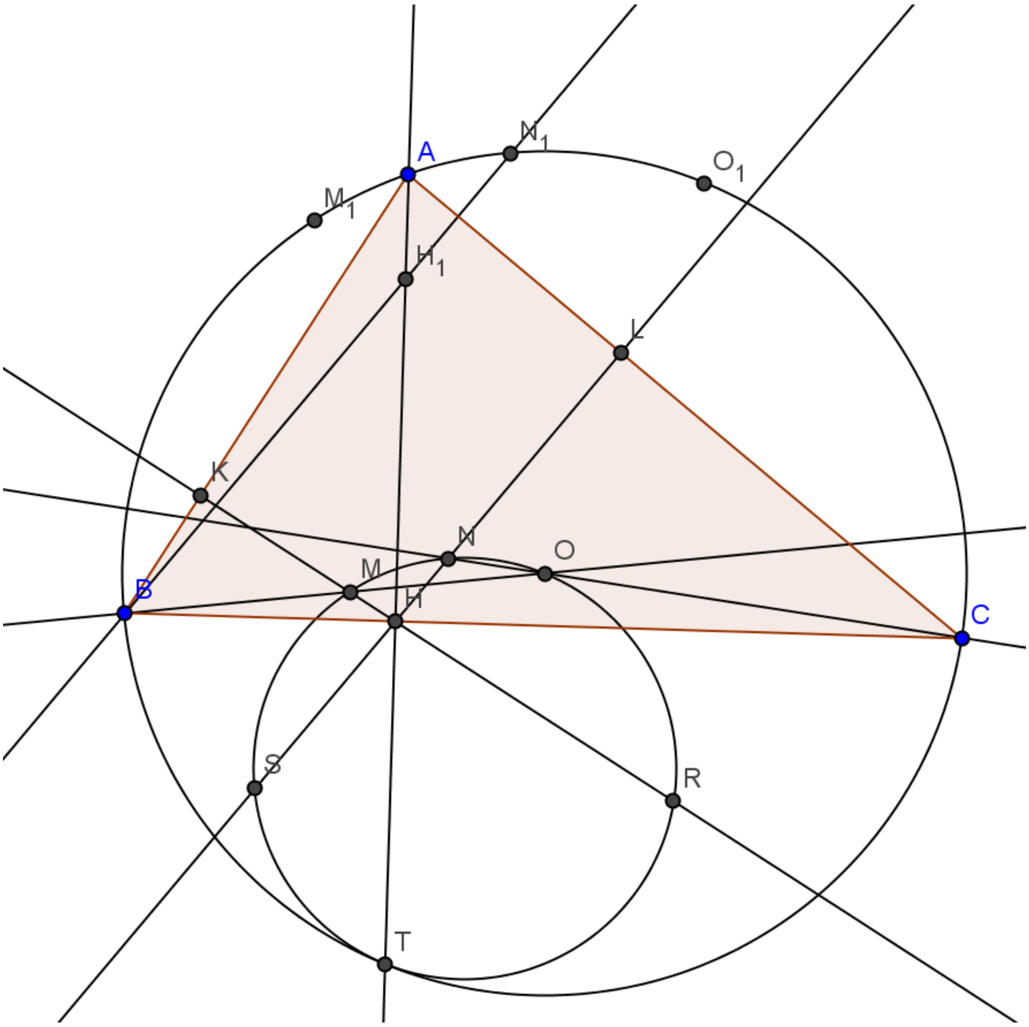
Construyamos ahora los puntos R y S.



Sea T el punto en que la altura AH corta de nuevo a la circunferencia circunscrita.

El simétrico de T respecto de H es H_1, ortocentro de ABC, por lo que BH_1 es la altura del lado AC, y T se transforma respecto a la simetría central de N en N_1, y respecto a O en T_1. Luego el punto N_1 pertenece a la circunferencia circunscrita.

De análoga manera, el simétrico T respecto a M es M_1, perteneciente a la circunferencia circunscrita.



Así tenemos que la circunferencia circunscrita a MON es una homotética de la circunscrita de centro T y razón ½. Así, el triángulo HSR es el homotético del H_1BC de centro T y razón ½.

Por ello, RS=1/2 BC =PQ, y paralelos RS y PQ, siendo por tanto PSRQ un rectángulo, y siendo concíclicos, c.q.d.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla.