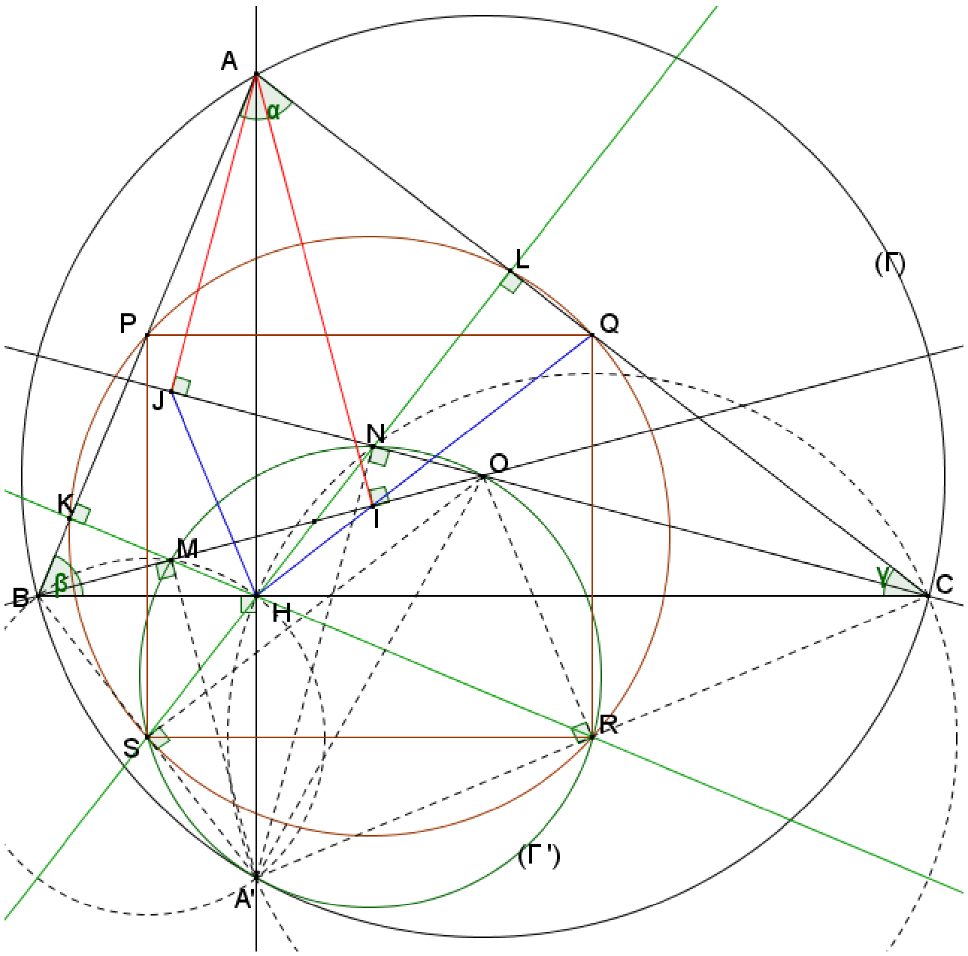
Problema 859
En un triángulo acutángulo ABC, se consideran:
- el centro O del círculo circunscrito,
- la altura AH,
- las proyecciones I y J de A sobre las rectas BO y CO,
- las proyecciones K y L de H sobre los lados AB y AC,

La recta HJ corta el lado AB al punto P y la recta HI corta el lado AC al punto Q.
La recta HK corta la recta BO al punto M y la recta HL corta la recta CO al punto N
El círculo circunscrito al triángulo OMN corta la recta HK en el segundo punto R y la recta HL en el segundo punto S.
Demostrar que los cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo círculo.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par α, β et γ les angles ∠BAC, ∠CBA et ∠BCA avec α + β + γ = 180°.
Lemme n°1 : **les points P et Q sont les milieux des côtés AB et AC**
On a ∠BOC = 2α. Donc ∠OBC = 90° − α et ∠ABO = α + β − 90° = 90° − γ.
Comme les triangles AHB et AIB sont rectangles, les points A,B,H,I sont cocycliques.
D'où ∠ABO = ∠ABI = ∠AHI = ∠AHQ = 90° − γ = 90° − γ = ∠CAH = ∠QAH
Le sommet Q du triangle isocèle QAH est milieu de l'hypoténuse AC du triangle rectangle AHC. De la même manière P est milieu de AB.
Il en résulte que la droite [PQ] est parallèle à la droite [BC] avec PQ = BC/2.

On désigne par A' l'intersection de la droite [AH] avec le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC
Lemme n°2: les points R et S sont les milieux des hypoténuses des triangles A'CH et A'BH
Le cercle circonscrit au triangle A'BH coupe la droite [OB] au point M'.Ce point M' est confondu avec le point M. En effet les points A',B,H,M' étant cocycliques on a les relations d'angles : ∠BA'M' = 90° − ∠A'BC − ∠CBO
soit ∠BA'M' = 90° − (90° − γ) − (90° − α) = 90° − β = ∠BHK.C.q.f.d.
Il en résulte que A'M est perpendiculaire à la droite [OB] de même que A'N est perpendiculaire à la droite [OC].
Le cercle (Γ ') qui passe par les points M,N et O passe également par le point A' et admet A'O pour diamètre. Comme les triangles OBA' et OCA' sont isocèles de sommet O, les droites OR et OS sont respectivement médiatices de A'C et de A'B.
D'où ∠A'RO = ∠A'SO = 90°. Les points R et S milieux de A'C et A'B sont sur le cercle (Γ '). C.q.f.d.
Conclusion: la droite [RS] est parallèle à la droite [BC] avec RS = BC/2. Le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.Comme la droite [PS] qui passe par les milieux des segments BA et BA' est parallèle à la droite [AA'], elle-même perpendiculaire à [BC], **PQRS est un rectangle** dont les sommets sont sur un même cercle.