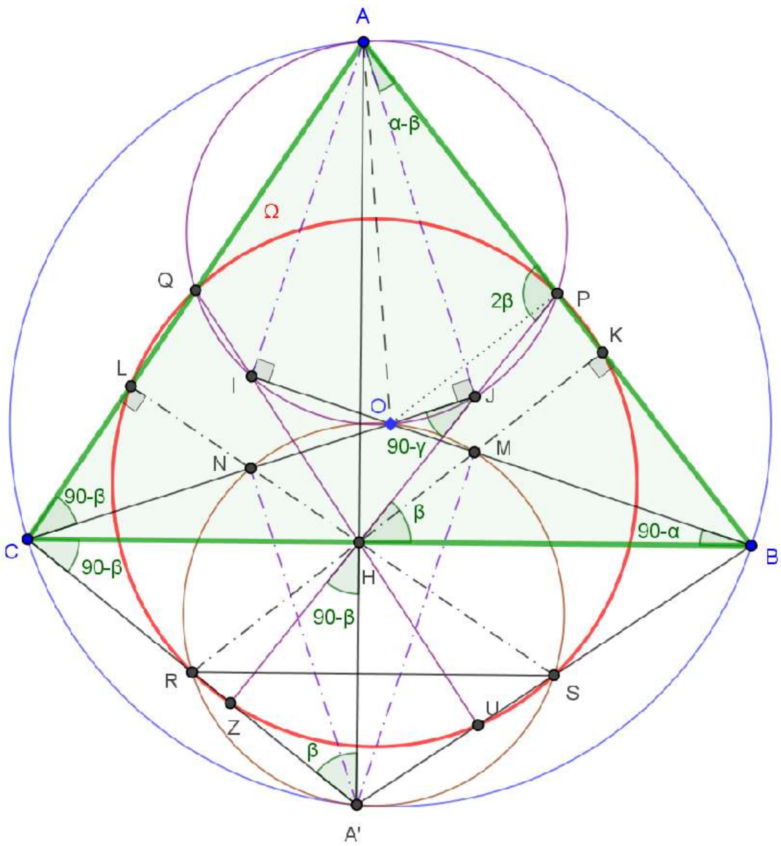
Quincena del 1 al 15 de Diciembre de 2017.

Propuesto por Philippe Fondanaiche.

***Problema 859**.- En un triángulo acutángulo ABC, se consideran:*
- el centro O del círculo circunscrito,
- la altura AH,
- las proyecciones I y J de A sobre las rectas BO y CO,
- las proyecciones K y L de H sobre los lados AB y AC,
La recta HJ corta el lado AB al punto P y la recta HI corta el lado AC al punto Q.
La recta HK corta la recta BO al punto M y la recta HL corta la recta CO al punto N.
El círculo circunscrito al triángulo OMN corta la recta HK en el segundo punto R y la recta HL en el segundo punto S.
Demostrar que los cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo círculo.

Fondanaiche, P. (2017): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



1) Veamos en primer lugar que los puntos P y Q definidos en el problema son los puntos medios de los lados BC y AC respectivamente. Para ello vamos a demostrar que, en el supuesto de que P fuera el punto medio de AB, los ángulos CJH y OJP son suplementarios.
En efecto, si P es el punto medio (los puntos A, Q, I, O, J y P están situados en una circunferencia de diámetro $R = OA$, el radio de la circunscrita) está en la mediatriz de la altura AH y por tanto el triángulo APH es isósceles de ahí resulta que $\sphericalangle PHB = \beta$ y $\sphericalangle CJH = 90 - \gamma$. Por otro lado $\measuredangle OAP$ y $\measuredangle OJP$ son suplementarios (opuestos en el cuadrilátero cíclico $AOJP$).

En triángulo OAP tenemos: $\cos(\measuredangle OAP) = \frac{c/2}{R} = \operatorname{sen}\gamma$, por tanto

$$\measuredangle OAP = 90 - \gamma \ \ \measuredangle OPJ = 90 + \gamma,$$

que demuestra que H, P y J están alineados. Análogamente para el punto Q.

(Si $\alpha < \beta$, el razonamiento es similar con ligeras variaciones).

2) Por la definición de los puntos I, J se tiene:

$$OI = c \cdot \cos(90 - \gamma) - R = 2R \cdot \operatorname{sen}^2\gamma - R = R \cdot |\cos 2\gamma|$$

$$ON = CO - CN = R - \frac{CL}{\cos(90- \ )} = R - 2R \cdot \cos^2\gamma = R \cdot |\cos 2\gamma|.$$

($CL = b \cdot \cos^2\gamma$, proyectando AC sobre CB y luego sobre AC)

Intercambiando ahora los papeles de β y γ obtenemos $OJ = R \cdot |\cos 2\beta| = ON$

Estas igualdades entre las longitudes de esos segmentos demuestran que la circunferencia circunscrita a APQ y la circunferencia circunscrita a OMN proceden una de la otra por una simetría respecto de la mediatriz de la altura AH.

3) Fijémonos ahora en el triángulo $A'BC$, donde A' es el otro punto de corte de la altura AH en la circunscrita al triángulo ABC. Según la simetría mencionada $A'M$ y $A'N$ son perpendiculares a los diámetros BO y CO; por lo demostrado en **1)** sus proyecciones desde H sobre $A'C$ y $A'B$ son los puntos medios de los lados correspondientes, (R y S), y están situados sobre la circunferencia OMN. El segmento RS es la paralela media de $A'CB$, igual que QP lo era de ACB, por tanto, los cuatro puntos $PQRS$ forman un rectángulo y en consecuencia yacen sobre una misma circunferencia.

En correspondencia con el triángulo ABC, donde M se proyecta desde H perpendicularmente en AB, su homólogo J se proyecta desde H sobre $A'C$ perpendicularmente a este lado e igualmente, I sobre $A'B$. ■