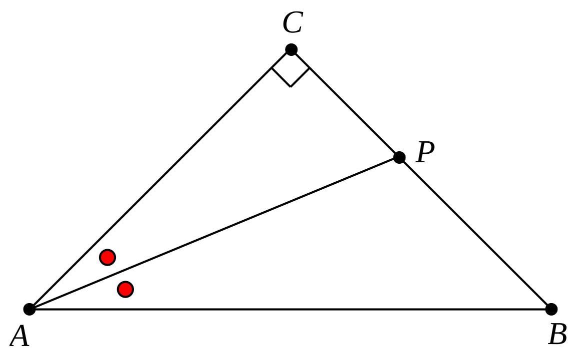
Problema 860. En el triángulo rectángulo isósceles ABC, $AC = BC$ el ángulo bisectriz de A corta BC en el punto P. Demostrar que la longitud del segmento PB es igual al diámetro del círculo inscrito de ABC.

Komal Septiembre 2002, problema C683

Solución de Ercole Suppa. Denotamos $BC = a$ y sea r es el radio del círculo inscrito de ABC.



Tenemos $AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ y luego del teorema de la bisectriz se deduce que

$$\frac{BP}{PC} = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{PB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = 2-\sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

y entonces $PB = \left(2-\sqrt{2}\right)a$.

Por otro lado el diámetro del círculo inscrito de ABC es

$$2r = AC + BC - AB = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} - a = \sqrt{2}a - a = \left(2-\sqrt{2}\right)a$$

y así hemos terminado. $\square$