Problema 860 de *triánguloscabri*. *C683. En el triángulo rectángulo isósceles ABC, con $AC = BC$, la bisectriz del ángulo A corta a BC en el punto P. Demostrar que la longitud del segmento PB es igual al diámetro del círculo inscrito de ABC.*

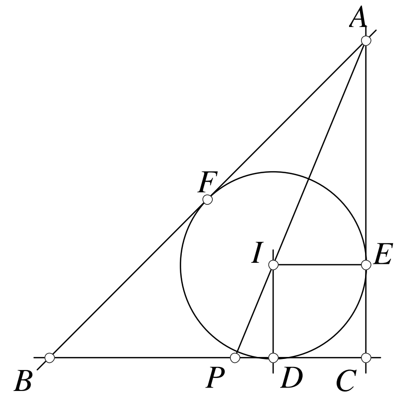
Komal Septiembre 2002

Solución de Francisco Javier García Capitán. Daremos la solución directa del problema y una construcción de todos los triángulos que cumplen la condición $PB = 2r$.

Solución del problema

En cualquier triángulo, por el teorema de la bisectriz, es

$$\frac{BP}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{BP}{BD + DC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow BP = \frac{ac}{b + c}.$$



En el triángulo rectángulo ABC con $C = 90°$ tenemos $r = \frac{a+b-c}{2}$, ya que si DEF es el triángulo pedal del incentro I es

$$r = DI = DC = s - c.$$

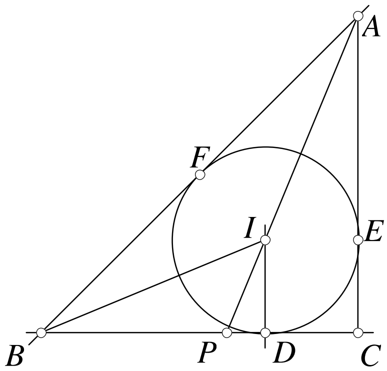
En nuestro caso, al ser el triángulo rectángulo con $C = 90°$ e isósceles, tenemos $c = \sqrt{2}a$ y $b = a$. Por tanto,

$$PB = \frac{ac}{b+c} = \frac{a \cdot \sqrt{2}a}{a + \sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{2}a = \left(2 - \sqrt{2}\right)a,$$

$$2r = a + b - c = a + a - \sqrt{2}a = \left(2 - \sqrt{2}\right)a.$$

Construcción geométrica

Llamemos p a la longitud $BP = 2r$. Sobre una recta situamos los puntos B y P tales que $BP = p$, y situamos también un punto arbitrario D sobre dicha recta, que será el punto de contacto con la circunferencia inscrita.



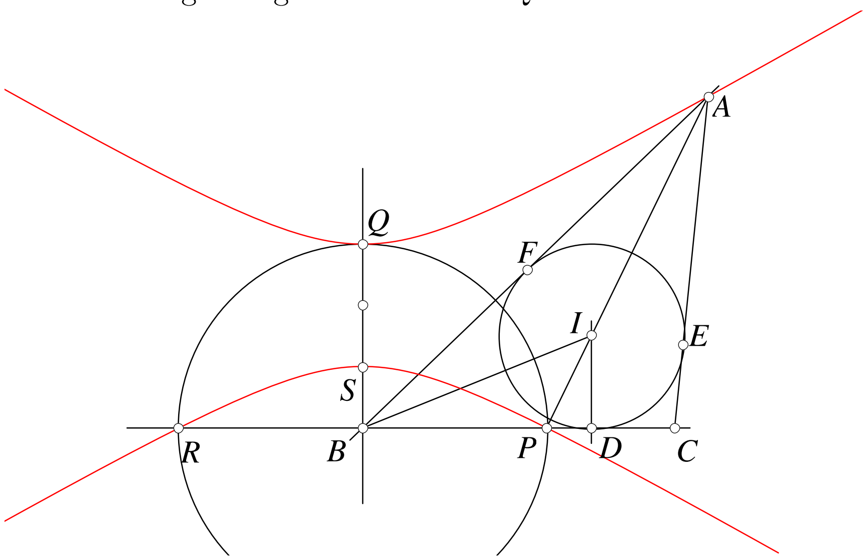
A continuación levantamos una perpendicular $DI = \frac{1}{2}p$ a la recta BP. La circunferencia (I, ID) será la circunferencia inscrita.

Trazamos la segunda tangente BF desde B a dicha circunferencia. A continuación obtenemos el vértice A como intersección de BF y PI, y hallamos E como el simétrico de F respecto de AI.

Finalmente, digamos que, fijado P, al variar D el punto A está sobre la hipérbola

$$\frac{\left(y - \frac{2p}{3}\right)^2}{\frac{p^2}{9}} - \frac{x^2}{\frac{p^2}{3}} = 1.$$

En la figura siguiente es $PB = QB = RB = 3 \cdot SB$:



Para que la circunferencia (I, ID) sea la circunferencia inscrita y no la exinscrita, A no puede variar en todos los puntos de la hipérbola, es decir, fijado P, hay alguna restricción para D. Puede comprobarse que la condición para que la construcción sea posible es

$$-1 < \frac{BD}{BP} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.$$