TRIÁNGULOS CABRI

Problema 860. (Komal Septiembre 2002) Dado un triángulo isósceles ABC, con $AC = BC$, se considera el punto P de intersección entre la recta BC y la bisectriz interior correspondiente al vértice A. Probar que el triángulo ABC es rectángulo en C si y sólo si la longitud del segmento PB es igual al diámetro de su incírculo.

Solución:

Como $b = a$, el Teorema de la Bisectriz nos asegura que:

$$PB^2 = \left(\frac{ac}{a+c}\right)^2 = \frac{a^2c^2}{(a+c)^2}$$

y, llamando r al inradio del triángulo ABC, como:

$$(2r)^2 = 4r^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c} = \frac{c^2(2a-c)}{2a+c}$$

entonces:

$$PB = 2r \Leftrightarrow 0 = PB^2 - (2r)^2 = \frac{c^3(2a^2-c^2)}{(a+c)^2(2a+c)} \Leftrightarrow c^2 = 2a^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \measuredangle ACB = \frac{\pi}{2}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega