

Problema 860

En un triangle rectangle isòsceles $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, l'angle bisectriu de A talla el costat $\overline{BC}$ en el punt P. Demostreu que la longitud del segment $\overline{PB}$ és igual al diàmetre del cercle inscrit de $\triangle ABC$.

KöMaL, setembre 2002

Solució 1 Ricard Peiró i Estruch:

Siguen $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ catets del triangle rectangle isòsceles.

Siga $\overline{AB} = c$ la hipotenusa.

Siga I l' incentre. Siga T la projecció de I sobre el catet $\overline{AC}$.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle és:

$$r = \overline{IT} = \overline{CT} = \frac{2a - c}{2}.$$

$$\overline{AT} = \frac{c}{2}.$$

Els triangles rectangles $\triangle PCA$, $\triangle ITA$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CP}}{a} = \frac{\frac{2a - c}{2}}{\frac{c}{2}}. \text{ Aleshores, } \overline{CP} = \frac{(2a - c)a}{c}.$$

$$\overline{PB} = a - \overline{CP} = a - \frac{2a^2 - ac}{c} = \frac{2ac - 2a^2}{c}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle ABC$, $2a^2 = c^2$.

$$\overline{PB} = \frac{2ac - 2a^2}{c} = \frac{2ac - c^2}{c} = 2a - c = 2r.$$

Solució 2:

Siguen $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ catets del triangle rectangle isòsceles.

Siga $\overline{AB} = c$ la hipotenusa.

Siga I l' incentre. Siga T la projecció de I sobre el catet $\overline{AC}$.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle és:

$$r = \overline{IT} = \overline{CT} = \frac{2a - c}{2}.$$

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{\overline{PB}}{c} = \frac{a - \overline{PB}}{a} = \frac{a}{a + c}.$$

$$\overline{PB} = \frac{ac}{a + c} = \frac{ac}{a + c} \cdot \frac{2a - c}{2a - c} = \frac{ac(2a - c)}{2a^2 + ac - c^2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle ABC$, $2a^2 = c^2$.

$$\overline{PB} = \frac{ac(2a - c)}{2a^2 + ac - c^2} = \frac{ac(2a - c)}{ac} = 2a - c = 2r.$$

