Problema 860

En un triángulo rectángulo isósceles $\stackrel{\triangle}{ABC}$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, el ángulo bisectriz de A talla el lado \overline{BC} en el punto P. Demostrar que la longitud del segmento \overline{PB} es igual al

diámetro del círculo inscrito de $\stackrel{\scriptscriptstyle\Delta}{\mathsf{ABC}}$.

KöMaL, septiembre 2002



Sean $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ catetos del triángulo rectángulo isósceles.

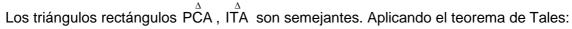
Sea $\overline{AB} = c$ la hipotenusa.

Sea I el incentro. Sea T la proyección de I sobre el cateto $\overline{\mathsf{AC}}$.

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo es:

$$r = \overline{IT} = \overline{CT} = \frac{2a - c}{2}$$
.

$$\overline{\mathsf{AT}} = \frac{\mathsf{c}}{2}$$
.



$$\frac{\overline{CP}}{a} = \frac{\frac{2a-c}{2}}{\frac{c}{2}}. \text{ Entonces, } \overline{CP} = \frac{(2a-c)a}{c}.$$

$$\overline{PB} = a - \overline{CP} = a - \frac{2a^2 - ac}{c} = \frac{2ac - 2a^2}{c} \ .$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\stackrel{\Delta}{ABC}$, $2a^2=c^2$.

$$\overline{PB} = \frac{2ac - 2a^2}{c} = \frac{2ac - c^2}{c} = 2a - c = 2r$$
.

Solución 2:

Sean $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ catetos del triángulo rectángulo isósceles.

Sea $\overline{AB} = c$ la hipotenusa.

Sea I el incentro. Sea T la proyección de I sobre el cateto AC.

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo es:

$$r = \overline{IT} = \overline{CT} = \frac{2a - c}{2}$$
.

Aplicando la propiedad de la bisectriz:

$$\frac{\overline{PB}}{c} = \frac{a - \overline{PB}}{a} = \frac{a}{a + c}$$

$$\overline{PB} = \frac{ac}{a+c} = \frac{ac}{a+c} \cdot \frac{2a-c}{2a-c} = \frac{ac(2a-c)}{2a^2 + ac - c^2} \,.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\stackrel{\Delta}{\mathsf{ABC}}$, $2a^2=c^2$.

$$\overline{PB} = \frac{ac(2a-c)}{2a^2 + ac - c^2} = \frac{ac(2a-c)}{ac} = 2a-c = 2r$$
.