

Problema 860

En un triángulo rectángulo isósceles $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, el ángulo bisectriz de A talla el lado $\overline{BC}$ en el punto P. Demostrar que la longitud del segmento $\overline{PB}$ es igual al diámetro del círculo inscrito de $\triangle ABC$.

KöMaL, septiembre 2002

Solución 1 Ricard Peiró i Estruch:

Sean $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ catetos del triángulo rectángulo isósceles.

Sea $\overline{AB} = c$ la hipotenusa.

Sea I el incentro. Sea T la proyección de I sobre el cateto $\overline{AC}$.

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo es:

$$r = \overline{IT} = \overline{CT} = \frac{2a - c}{2}.$$

$$\overline{AT} = \frac{c}{2}.$$

Los triángulos rectángulos $\triangle PCA$, $\triangle ITA$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CP}}{a} = \frac{\frac{2a - c}{2}}{\frac{c}{2}}. \text{ Entonces, } \overline{CP} = \frac{(2a - c)a}{c}.$$

$$\overline{PB} = a - \overline{CP} = a - \frac{2a^2 - ac}{c} = \frac{2ac - 2a^2}{c}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\triangle ABC$, $2a^2 = c^2$.

$$\overline{PB} = \frac{2ac - 2a^2}{c} = \frac{2ac - c^2}{c} = 2a - c = 2r.$$

Solución 2:

Sean $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ catetos del triángulo rectángulo isósceles.

Sea $\overline{AB} = c$ la hipotenusa.

Sea I el incentro. Sea T la proyección de I sobre el cateto $\overline{AC}$.

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo es:

$$r = \overline{IT} = \overline{CT} = \frac{2a - c}{2}.$$

Aplicando la propiedad de la bisectriz:

$$\frac{\overline{PB}}{c} = \frac{a - \overline{PB}}{a} = \frac{a}{a + c}.$$

$$\overline{PB} = \frac{ac}{a + c} = \frac{ac}{a + c} \cdot \frac{2a - c}{2a - c} = \frac{ac(2a - c)}{2a^2 + ac - c^2}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\triangle ABC$, $2a^2 = c^2$.

$$\overline{PB} = \frac{ac(2a - c)}{2a^2 + ac - c^2} = \frac{ac(2a - c)}{ac} = 2a - c = 2r.$$

