
Pr. Cabri 863

Demostrar que el triángulo isósceles tiene el menor perímetro y el menor radio del círculo mínimo entre todos los triángulos con lado a y altura h determinados.

Gashkov, S. B. (2015): Desigualdades geométricas :Una guía con más de 600 problemas y teoremas. Ed. URSS

Propuesto por César Beade Franco.

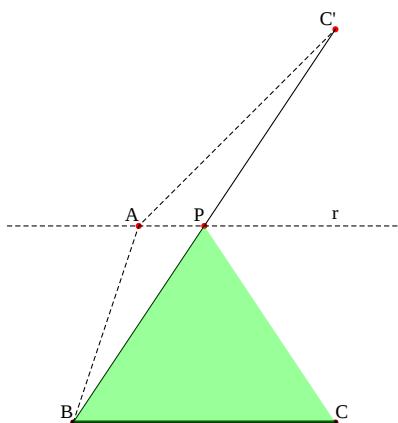
■ Solución por César Beade Franco

■ 863 A.

El vértice A estará situado sobre una paralela r al lado a y que dista h de r .

Como a fijo el perímetro será mínimo cuando lo sea $AB+AC$. El valor mínimo de esta magnitud es BC' , siendo C' el simétrico de C respecto a r .

Dicho valor se da cuando A está situado en P punto medio de AC' (dibujo), o sea, PBC isósceles.

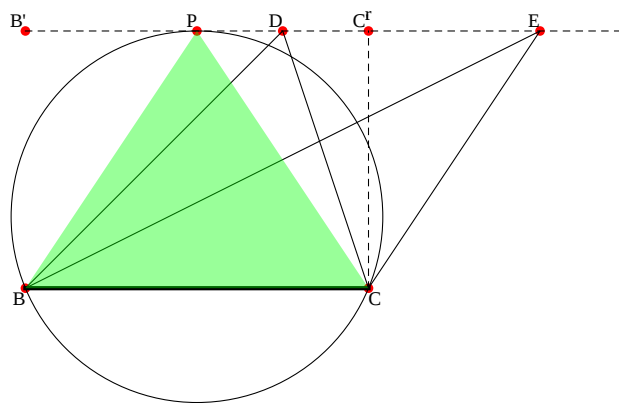


■ 863 B.

Si un triángulo es acutángulo o rectángulo (diámetro igual a hipotenusa), el círculo mínimo que lo contiene es el circunscrito y si es obtusángulo, es aquel que tiene como diámetro el lado mayor.

El vértice A estará situado sobre una paralela r al lado a y que dista h de r .

Supongamos que $h < \frac{a}{2}$. En este caso, PBC isósceles es obtusángulo con diámetro mínimo de longitud a menor o igual que el de otro triángulo ABC . Ciertamente hay una infinidad de triángulos con este diámetro mínimo.



Si $ha \geq \frac{a}{2}$, el triángulo isósceles PBC tiene como círculo mínimo el circunscrito de diámetro $\frac{a}{\text{sen}P}$. Si la posición del punto A está entre B' y C' (D en el dibujo), su círculo mínimo es circunscrito con diámetro $\frac{a}{\text{sen}D} > \frac{a}{\text{sen}P}$, al ser el ángulo $D < \text{ángulo } P$.

Y si A está fuera del segmento B'C' (E en el dibujo), es obtusángulo y su círculo mínimo tiene diámetro $BE > BC' > \frac{a}{\text{sen}P}$.