

Problema 863

Demostreu que el triangle isòsceles té el menor perímetre i el menor radi del cercle circumscribit entre tots els triangles de costat a i altura h_a

Gushkov, S. B. (2015): *Desigualdades geométricas :Una guía con más de 600 problemas y teoremas*. Mir

Solució:

Considerem la recta r paral·lela al costat $\overline{BC}$.

Siga C' el punt simètric de C respecte de la recta r .

Siga P el punt projecció de C sobre la recta r .

La recta BC' talla la recta r en el punt A'

Notem que $A'P$ és paral·lela mitjana del triangle

$\triangle BCC'$.

$$\overline{A'P} = \frac{1}{2} \overline{BC}.$$

Aleshores, $\triangle BCA'$ és isòsceles.

Vegem que el perímetre del triangle $\triangle BCA'$ és menor

que el perímetre del triangle $\triangle BCA$:

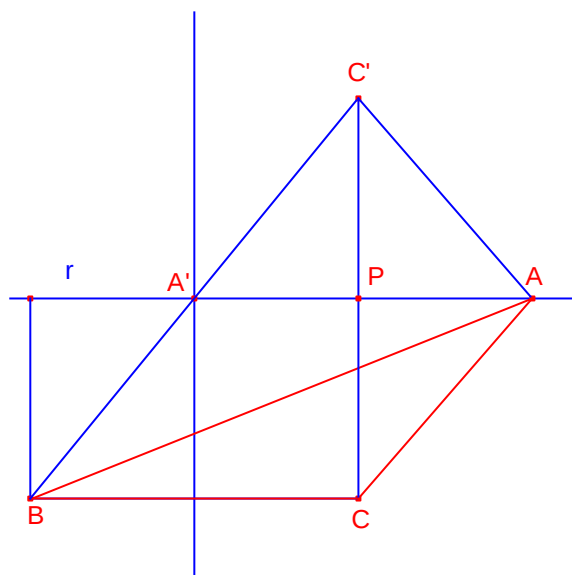
$$\overline{BA'} + \overline{CA'} = \overline{BA'} + \overline{A'C'} = \overline{BC'} \leq \overline{BA} + \overline{AC'} = \overline{BA} + \overline{CA}.$$

$$\overline{BA'} + \overline{CA'} \leq \overline{BA} + \overline{CA}.$$

$$\overline{BC} + \overline{BA'} + \overline{CA'} \leq \overline{BC} + \overline{BA} + \overline{CA}.$$

La igualtat s'assoleix quan A coincideix amb A' .

Per tant, el perímetre del triangle isòsceles és el menor.



Considerem el triangle isòsceles $\triangle BCA'$ $\angle BA'C \leq 90^\circ$ i siga R el radi de la circumferència circumscribita.

La recta r és tangent a la circumferència circumscribita.

Qualsevol punt de la recta r A distint de A' és exterior a la circumferència.

$$90^\circ > \angle BA'C' > \angle BAC.$$

Siga R' radi de la circumferència circumscribita al triangle

$\triangle BCA$.

Aplicant el teorema dels sinus:

$$2R = \frac{a}{\sin \angle BAC'} \leq \frac{a}{\sin \angle BAC} = 2R'$$

Per tant, el radi de la circumferència circumscribita a l'isòsceles és el menor.

