

Problema 863

47 Demostrar que el triángulo isósceles tiene el menor perímetro y el menor radio del círculo mínimo (circunscrito) entre todos los triángulos con lado a y altura h_a determinados. (p. 26)

Gushkov, S. B. (2015): *Desigualdades geométricas :Una guía con más de 600 problemas y teoremas.* Mir

Solución de Ricard Peiró:

Consideremos la recta r paralela al lado $\overline{BC}$.

Sea C' el punto simétrico de C respecto de la recta r .

Sea P el punto proyección de C sobre la recta r .

La recta BC' corta la recta r en el punto A'

Notemos que $A'P$ es paralela media del triángulo

$\triangle BCC'$.

$$\overline{A'P} = \frac{1}{2} \overline{BC}.$$

Entonces, $\triangle BCA'$ es isósceles.

Veamos que el perímetro del triángulo $\triangle BCA'$ es menor

que el perímetro del triángulo $\triangle BCA$:

$$\overline{BA'} + \overline{CA'} = \overline{BA'} + \overline{A'C'} = \overline{BC'} \leq \overline{BA} + \overline{AC'} = \overline{BA} + \overline{CA}.$$

$$\overline{BA'} + \overline{CA'} \leq \overline{BA} + \overline{CA} \text{ .punto}$$

$$\overline{BC} + \overline{BA'} + \overline{CA'} \leq \overline{BC} + \overline{BA} + \overline{CA}.$$

La igualdad se alcanza cuando A coincide con A' .

Por tanto, el perímetro del triángulo isósceles es el menor.

Consideremos el triángulo isósceles $\triangle BCA'$ $\angle BA'C \leq 90^\circ$ y sea R el radio de la circunferencia circunscrita.

La recta r es tangente a la circunferencia circunscrita.

Cualquier punto de la recta r A distinto de A' es exterior a la circunferencia.

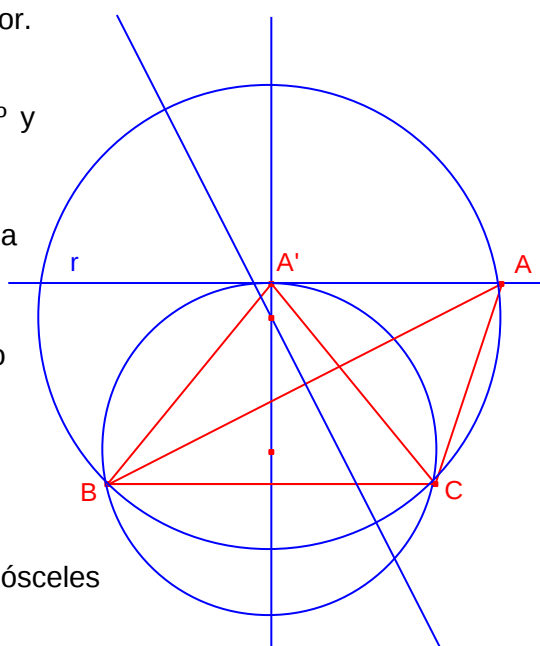
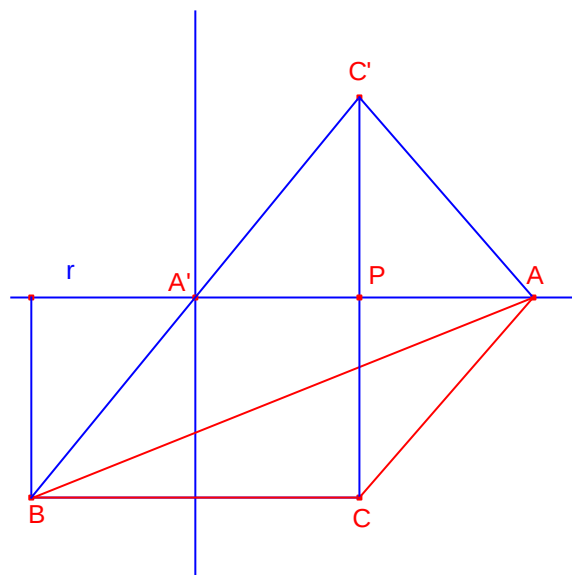
$$90^\circ > \angle BA'C' > \angle BAC.$$

Sea R' radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle BCA$.

Aplicado el teorema de los senos:

$$2R = \frac{a}{\sin \angle BAC'} \leq \frac{a}{\sin \angle BAC} = 2R'$$

Por tanto, el radio de la circunferencia circunscrita del isósceles es el menor.



Si el triángulo es obtusángulo la propiedad no se cumple

