
Pr. Cabri 864

Demostrar que el triángulo isósceles tiene la menor área y el menor perímetro entre todos los triángulos con ángulo A y altura h determinados.

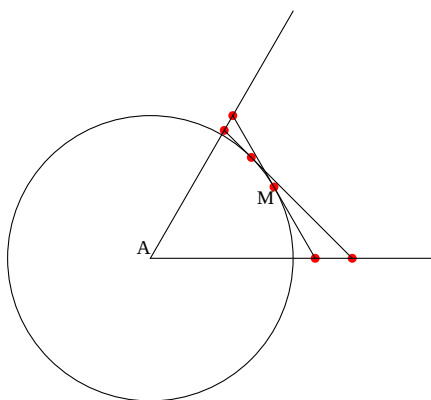
Gashkov, S. B. (2015): Desigualdades geométricas :Una guía con más de 600 problemas y teoremas. Ed. URSS

Propuesto por César Beade Franco.

■ Solución por César Beade Franco

Para dibujar estos triángulos trazamos dos semirrectas que formen un ángulo y un circunferencia centrada en su vértice de radio h . El corte de cualquier tangente a esta circunferencia (en su primer cuadrante) con los lados del ángulo nos proporcionan los otros dos vértices de estos triángulos. Si la tangente pasa por M el triángulo es isósceles.

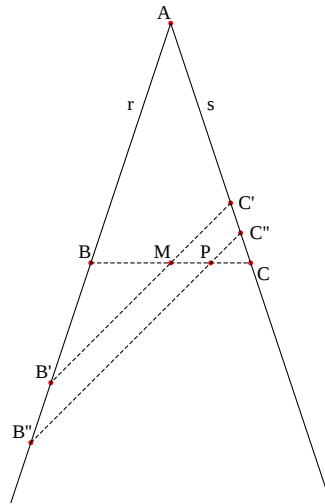
Out[293]=



El área será mínima cuando lo sea el segmento tangente, puesto que todos los triángulos tienen la misma altura.

Para la demostración de que la tangente por M tiene longitud mínima observemos el próximo dibujo.

Out[347]=



Comprobaremos que de los segmentos entre r y s que pasan por M , el que determina un triángulo isósceles es el de longitud mínima.

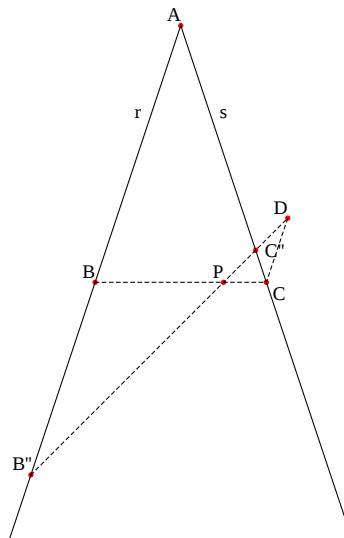
Tomemos $A=(0,a)$, $B=(-1,0)$, $C(1,0)$ y $M(0,0)$ punto medio de BC . Las rectas $r(AB)$ y $s(AC)$ tienen ecuaciones respectivas $y=a(x+1)$, $y=-a(x-1)$.

Una transversal $y=mx$, $0 < m < a$, las corta en los puntos $B'\left(\frac{a}{m+a}, \frac{ma}{m+a}\right)$ y $C'\left(\frac{a}{m-a}, \frac{ma}{m-a}\right)$.

Así que $B'C' = \frac{2a^2}{a^2-m^2} \sqrt{1+m^2} \geq 2$ ($=2$, si $m=0$) $=BC$.

Además si la transversal pasa por otro punto P distinto de M , será paralela a otra de menor longitud que pasa por M . En el dibujo anterior, $B''C'' > (\text{th. de Tales}) B'C' > BC$.

Out[346]=



Comparemos ahora los perímetros de ABC y $AB''C''$.

$p(ABC) = AB + BP + PC + CC'' + C''A < AB + BB'' + B''P + PC'' + C''A = p(AB''C'')$,

pues $BP + PC < B''P + PC''$ y $CC'' < PB''$ ya que PCD es semejante a PBB'' con todos sus lados menores así que $CC'' < CD < BB''$.

Concluimos que el isósceles es el de menor perímetro.