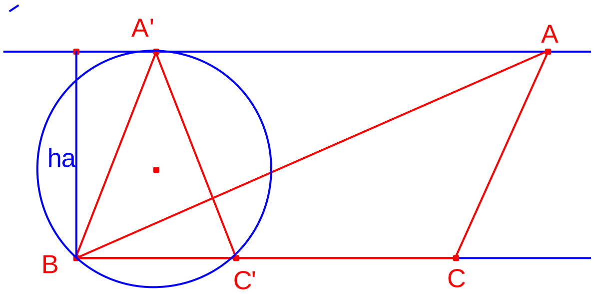
Problema 864

48 Demostrar que el triángulo isósceles tiene la menor área y el menor perímetro entre todos los triángulos con ángulo A y altura ha determinados (p. 26)

Gashkov, S. B. (2015): Desigualdades geométricas :Una guía con más de 600 problemas y teoremas. Mir

Solución Ricard Peiró:



Sea el triángulo $\overset{\Delta}{BCA}$ de ángulo A y altura.

Sea $\overset{\Delta}{BC'A'}$ tal que $A'=A$, $\overline{A'B}=\overline{A'C'}$ y altura h_a referida al vértice A’.

Consideremos la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles $\overset{\Delta}{BC'A'}$.

Consideremos la recta r paralela al lado $\overline{BC'}$ que pasa por A’.

Consideremos cualquier triángulo $\overset{\Delta}{BCA}$ de ángulo igual A’ y altura h_a el vértice A está sobre la recta r.

A es exterior a la circunferencia circunscrita. Entonces $\angle BAC' < \angle BA'C$.

Entonces, $\overline{BC'} \leq \overline{BC}$.

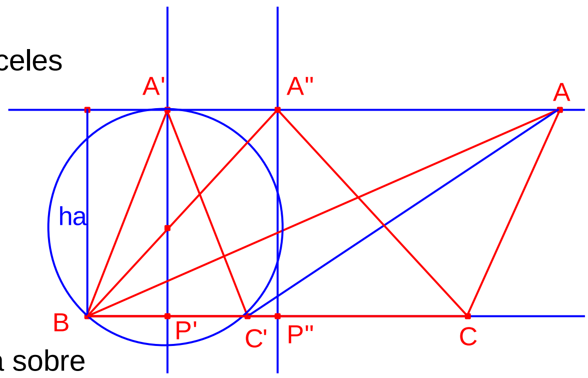
$$S_{BCA} = \frac{\overline{BC}\cdot h_a}{2}, \quad S_{BC'A'} = \frac{\overline{BC'}\cdot h_s}{2}$$

Entonces, $S_{BCA} \geq S_{BC'A'}$.

En la figura anterior consideremos el triángulo isósceles $\overset{\Delta}{BC'A''}$.

Dos triángulos de igual base y igual altura el de menor perímetro es el isósceles:

El perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{BC'A''}$ es menor que el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{BCA}$.



Dos triángulos isósceles que tienen la misma altura sobre el lado desigual tiene menor perímetro el que tiene menor lado desigual.

El perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{BC'A'}$ es menor que el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{BC'A''}$.

Entonces, el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{BC'A'}$ es menor o igual que el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{BCA}$.