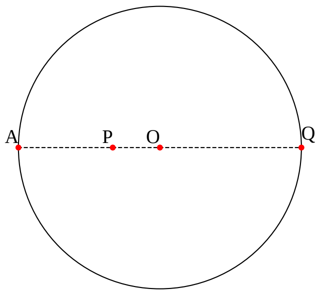
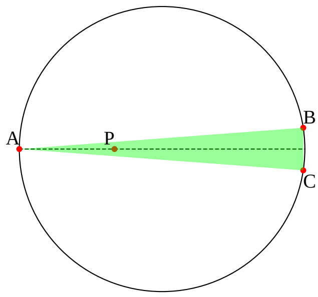
Pr. Cabri 865

Sean A, B , C los vértices de un triángulo inscrito en un círculo de radio 1, y sea P un punto del interior del triángulo. Demostrar que |PA| |PB| PC| < 32/27.
Erdös, P. (1993) : American Mathematical Monthly, February. (p. 184).

- **Solución**
  por CésarBeade Franco

Si P estuviera situado en el centro, |PA| |PB| PC|=1. Coloquémoslo en otra posición. Si es interior al triángulo al menos uno de sus vértices, digamos A, distará de P d<1. El punto del círculo más alejado de P será el extremo Q más distante del diámetro determinado por OP. Así pues situáremos el vértice A en el extremo próximo del diámetro OP, tal que AP=d, y B y C a cada lado de Q y tan cercanos a él como querramos. En el dibujo derecho vemos una "cuasi-solución".





Obtendremos la posición de P que haga máximo ese producto cuando B, C -> Q.
Tomamos A=(-1,0), P=(x,0) y Q=(1,0). Se trata de encontrar un máximo de la función $f(x)=|PA|\ |PQ|^2=(x+1)(x-1)^2$ en el intervalo [-1,1].

Éste máximo se da para $x=\frac{-1}{3}$. Así pues $|PA|\ |PB|\ PC|<|PA|\ |PQ|^2 = \frac{2}{3}.\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{32}{27}$.

P puede estar situado en cualquier punto de la circunferencia de centro O y radio $\frac{1}{3}$.