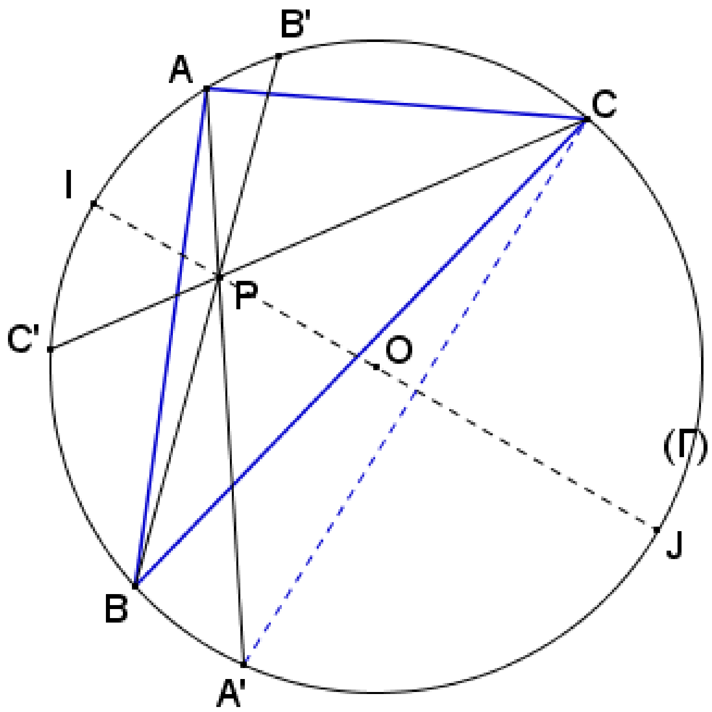
Problema 865
10282 Sean A, B , C los vértices de un triángulo inscrito en un círculo de radio 1, y sea P un punto del interior del triángulo. Demostrar que |PA| |PB| PC| < 32/27.
Erdös, P. (1993) : American Mathematical Monthly, February. (p. 184)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



OI = OJ = 1   OP = d

Soit (Γ) le cercle de rayon unité circonscrit au triangle ABC. On trace le diamètre IJ qui passe par le point P.
On pose OP = d, $0 < d < 1$. On a la relation PI.PJ = $(1 - d).(1 + d) = 1 - d^2$.
On trace les demi-droites AP, BP et CP qui coupent (Γ) respectivement aux points A',B' et C'.
La puissance de P par rapport à (Γ) est définie par les relations:
PA.PA' = PB.PB' = PC.PC' = PI.PJ = $1 - d^2$.
On suppose sans perte de généralité que PA < PB < PC (voir figure ci-contre).
Comme le point P est intérieur au triangle ABC, on a nécessairement l'un au moins des six cas suivants: PB < PA' ou PB < PC'ou PC < PB' ou PC < PA' ou PA < PC' ou PA < PB'.
Sans perte de généralité, retenons le premier cas PB < PA' (voir figure ci-contre).
On a donc PA.PB.PC < PA.PA'.PC . On est ainsi ramené à déterminer la valeur maximale du produit des distances d'un point aux trois sommets d'un triangle quand ce point est situé sur l'un des côtés du triangle,en l'occurence le côté AA' du triangle AA'C.
Or PA.PA' = PI.PJ = $1 - d^2$.
Par ailleurs PC < PJ = 1 + d. Donc PA.PB.PC < PA'.PA.PC < $(1 + d).(1 - d^2) = 1 + d - d^2 - d^3$.
Quand d varie sur l'intervalle]0,1[, l'expression $(1 + d).(1 - d^2)$ atteint son maximum quand la dérivée première s'annule, soit $1 - 2d - 3d^2 = (1 + d).(1 - 3d) = 0$. D'où d = 1/3.
On vérifie qu'il s'agit bien d'un maximum qui est égal à 4/3. 8/9 = 32/27. C.q.f.d.