

Problema n° 866

Sean tres puntos A, B y C tomados en este orden sobre el eje de las abscisas.

Trazamos el círculo (Γ) de diámetro AB y de centro O.

Cualquier recta que pasa por C corta el círculo (Γ) en los puntos D y E [A, D, E y B en este orden sobre el semicírculo (Γ)]

El círculo circunscrito al triángulo ACD y círculo circunscrito al triángulo BCE se cortan en un segundo punto F.

Las rectas AD y BE se cortan al punto P

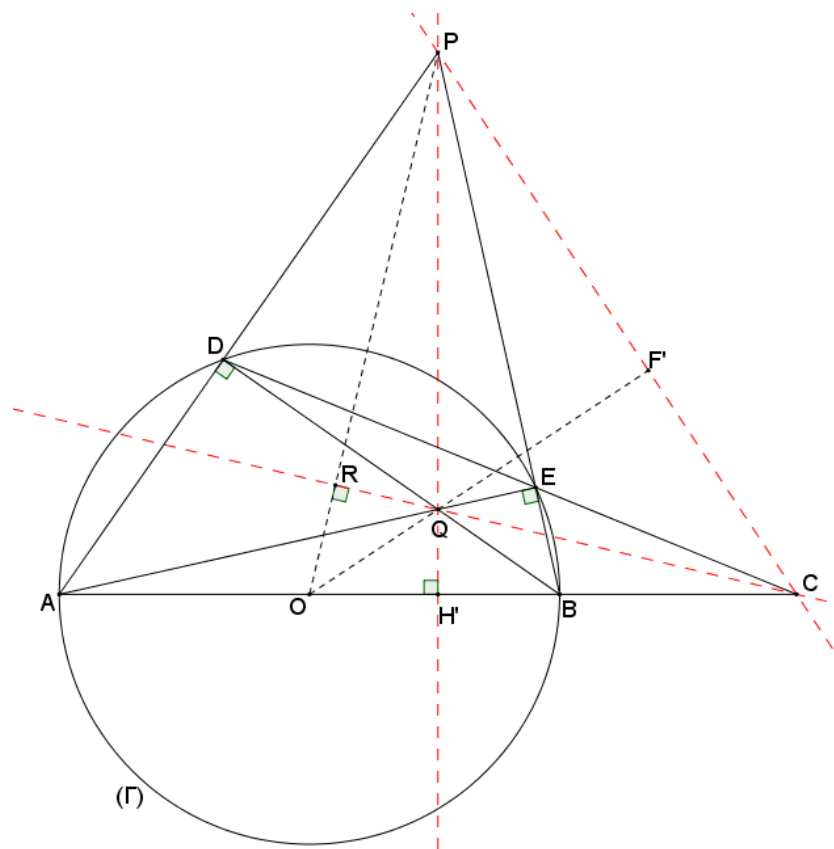
Las rectas AE y BD se cortan al punto Q

El círculo circunscrito al triángulo OFP corta a la recta AB en el segundo punto H

Q₁ Demostrar que el triángulo OPH es rectángulo.

Q₂ Demostrar que los puntos O, Q y F son alineados

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On considère le quadrangle complet ABED et les trois points C,P,Q qui lui sont associés respectivement à l'intersection des droites $[AB]$ et $[ED]$, des droites $[AD]$ et $[BE]$, enfin des diagonales $[AE]$ et $[BD]$. Ce quadrangle est inscrit dans le cercle (Γ) de diamètre $AB = 2\rho$ et de centre O.

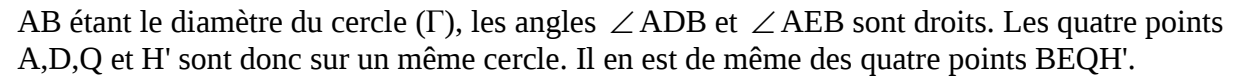
On a les propriétés suivantes:

- **PQ est la polaire de C par rapport à (Γ)**
- **CQ est la polaire de P par rapport à (Γ)**
- **CP est la polaire de Q par rapport à (Γ)**

Il en résulte que:

- la droite $[PQ]$ est perpendiculaire à la droite $[AB]$ qu'elle rencontre au point H' ,
- la droite $[OQ]$ est perpendiculaire à la droite $[CP]$ qu'elle rencontre au point F' ,
- la droite $[CQ]$ est perpendiculaire à la droite $[OP]$ qu'elle rencontre au point R ,

Nous allons démontrer que les points H' et F' sont respectivement confondus avec les points H et F qui sont définis dans l'énoncé.



Il en résulte que l'intersection F des cercles (ADC) et (BEC) est l'inverse de Q c'est à dire F'. Les points F et F' sont donc confondus et les points O, Q, F sont alignés (cf question Q₂).

Par cette même inversion la droite CQ devient le cercle passant par O d'une part et par les points transformés de C,Q et R à savoir H',F' et P. Il s'agit donc du cercle OF'P de diamètre OP qui est confondu avec le cercle OFP. Ce cercle coupe la droite [AB] au point H qui est donc confondu avec le point H'. On a $\angle OHP = 90^\circ$. Le triangle OHP est rectangle (cf question Q₁)