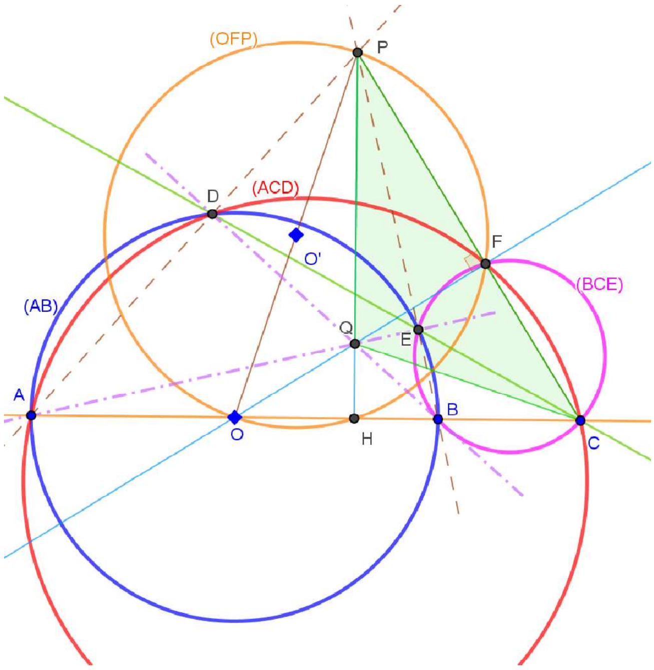
Quincena del 1 al 14 de Febrero de 2018.

***Problema 866**.- Sean tres puntos A, B y C tomados en este orden sobre el eje de las abscisas. Trazamos el círculo (Γ) de diámetro AB y de centro O. Cualquier recta que pasa por C corta el círculo (Γ) en los puntos D y E (A, D, E y B en este orden sobre el semicírculo (Γ)).*
El círculo circunscrito al triángulo ACD y círculo circunscrito al triángulo BCE se cortan en un segundo punto F.
Las rectas AD y BE se cortan al punto P.
Las rectas AE y BD se cortan al punto Q.
El círculo circunscrito al triángulo OFP corta a la recta AB en el segundo punto H.
Q_1. Demostrar que el triángulo OPH es rectángulo.
Q_2. Demostrar que los puntos O, Q y F son alineados.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



La recta AD es el eje radical de $\Gamma = (AB)$ y $\Omega = (ACD)$; BE es el eje radical de $\Gamma = (AB)$ y $\omega = (BCE)$; por tanto el punto P, de intersección de ambos ejes, es el centro radical de las tres circunferencias. Como FC es el eje radical de $\Omega = (ACD)$ y $\omega = (BCE)$ resulta que los puntos P, F y C están alineados.

CPQ es el triángulo diagonal del cuadrilátero cíclico $ADEB$, por tanto, autopolar para la circunferencia de diámetro AB. De ahí que su ortocentro sea O, centro de ésta, y por tanto, CP y OQ son perpendiculares.

Lo que queremos demostrar es que OQ y CP se cortan en F: el segundo punto común a las circunferencias (ADC) y (BCE). De ser así, $\measuredangle OFP = 90°$ y la circunferencia (OPF) (de centro el punto medio de OP) corta a OC en H tal que PH y OC son perpendiculares. Además tendríamos el alineamiento de los puntos O, Q y F y resuelto el problema.

Para ello vamos a tomar coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABD (ojo D en vez de C). Sea $E(u: v: w)$, donde u, v y w satisfacen la ecuación de la circunferencia circunscrita a ABD, $\Gamma(x, y, z) = a^2yz + b^2zx + c^2xy$. Su centro es $O = (a^2S_A: b^2S_B: c^2S_C)$, donde $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$ y expresiones análogas paraS_B y S_C.

Las proyecciones de E sobre los lados del triángulo de referencia desde los vértices del mismo A, B y D son los puntos $Q(0: v: w)$; $P(u: 0: w)$; $C(u: v: 0)$.

Intersección de las rectas CP y OQ:

Recta CP: $-\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=0$ y la recta OQ: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & v & w \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \end{vmatrix}=0.$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, con una gran dosis de paciencia, y con la ayuda de un programa de cálculo simbólico como *derive*, obtenemos el punto

$$F' = (2uS_A : b^2(u+v) : c^2(u+w)).$$

(Comprobar que F' es la solución de ese sistema es bastante más sencillo que llegar hasta él).

Intersección de las circunferencias (ACD) y (BCE):

Queremos ver F' es el punto de intersección de estas circunferencias, es decir, $F' = F$. Como F' está en el eje radical bastará con ver que también está en UNA de ellas.

Las ecuaciones de éstas son:

Circunferencia (ACD): $\Omega(x,y,z)=\Gamma(x,y,z)-(x+y+z)\frac{c^2u}{u+v}y$

Circunferencia (BCE): $\omega(x,y,z)=\Gamma(x,y,z)-(x+y+z)\frac{c^2v}{w(u+v)}(wx-uz)$,

(donde $\Gamma(x,y,z)=0$ es la ecuación de la circunscrita a (ABD))

Sólo es necesaria una de estas dos ecuaciones, usaremos la primera, por ser más sencilla.

Calculando (con *derive*) se obtiene:

$\Omega(2uS_A, b^2(u+v), c^2(u+w)) = b^2c^2(a^2vw+b^2wu+c^2uv)=0.$

Con esto queda probado que la recta OQ es perpendicular a CP en F, como deseábamos.

■