

Teorema para Calcular el área de un cuadrilátero

Milton Favio Donaire Peña

El siguiente problema publicado el 1 de Febrero del 2018, en la revista Triangulos Cabri¹, nos permitirá mostrar algunos resultados interesantes.

Problema 867 TriangulosCabri Sea L el simétrico de C respecto de N en el lado AC de un triángulo ABC , cuya circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos S , T y N respectivamente. La perpendicular a $\overline{AC}$ por T interseca a la recta SN en el punto P . D es un punto en el segmento LP ubicado de modo que $\overline{SP}$ biseca a $\overline{DB}$. Calcule el coseno del ángulo ACB en función de las áreas de las regiones $LBCD$ y ABC .

Propuesto por Milton F. Donaire Peña

Llegaremos a la solución del problema encontrando unos resultados previos sobre regiones triangulares y cuadrangulares. Primero nos basamos en un hecho bastante conocido:

El lugar geométrico de todos los puntos P que forman los triángulos ABP y CDP con dos segmentos AB y CD contenidos diferentes lados de un ángulo, tal que se cumpla que la suma de las áreas de las regiones ABP y CDP es constante, es una recta.

Esto se puede demostrar, trasladando los segmentos AB y CD hasta el vértice O del ángulo, de modo que A y C se ubiquen en O ; B y D se conviertan en B' y D' respectivamente; así la suma de las regiones triangulares en estudio, será igual al área de una región cuadrangular $OB'PD'$, se notará que al mover el punto P la región $OB'D'$ se mantiene constante, por lo que sólo

¹dirigida y editada por Ricardo Barroso Campos con dirección en <http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>

habría que conseguir que la región $B'PD'$ sea constante, y ello se consigue si P se mueve en una recta paralela a $B'D'$.

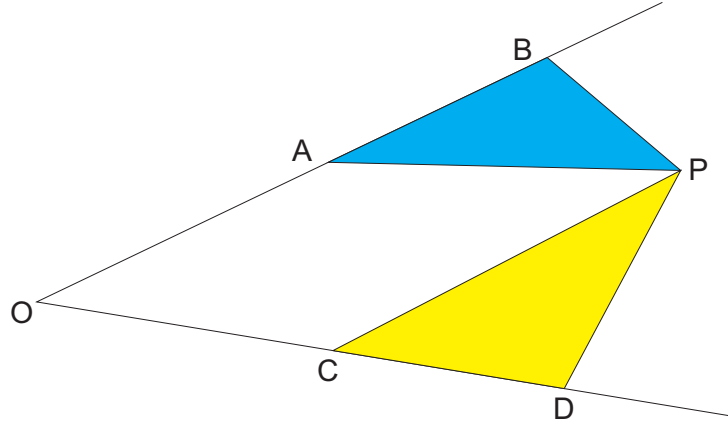


Figure 1: $[PAB] + [PCD]$ es constante sólo si P se mueve en una recta.

Ahora aplicamos el resultado anterior a un cuadrilátero $ABCD$ de región convexa, para la recta que pasa por los puntos medios de sus diagonales, ya que: $[ABM] + [CDM] = [ABN] + [CDN] = [ABCD]/2$ lo cual significa que dicha recta satisface el teorema anterior.

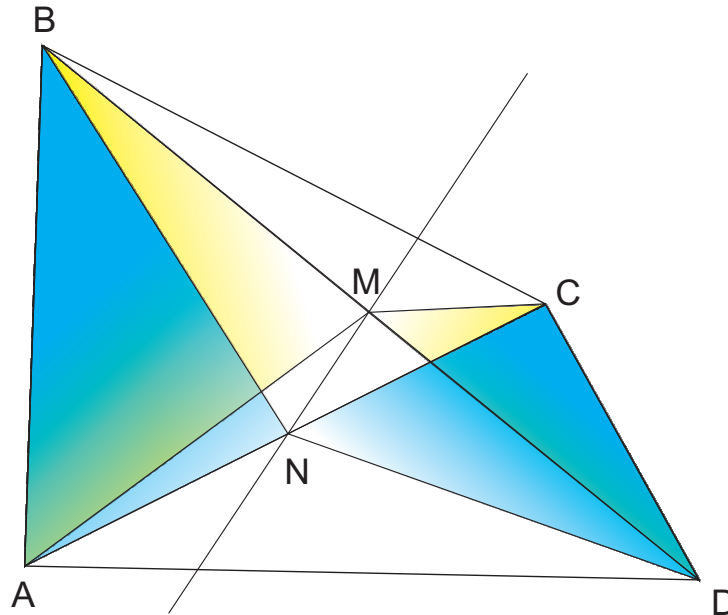


Figure 2: M y N puntos medios de las diagonales

Ahora sabemos que cualquier punto de la recta en cuestión deberá cumplir

el mismo resultado de la suma de áreas constante (en este caso, la mitad de la región cuadrangular), si tomamos un punto P , corte de dicha recta con uno de los lados del cuadrilátero, entonces $[APB] + [CPD] = [APD] = [ABCD]/2$. Este último resultado nos permitirá establecer un teorema simple para calcular el área de cualquier región cuadrangular, pero antes daremos una breve definición que nos servirá para evitar enunciados engorrosos en este artículo.

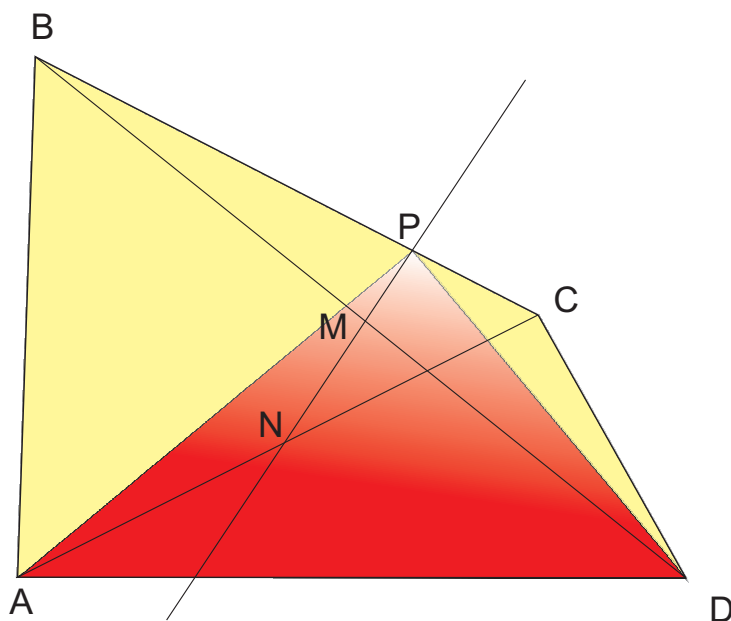


Figure 3: $[APD] = [ABCD]/2$

Perpendicular de Superficie

En una región cuadrangular la perpendicular de superficie es el segmento que se contruye perpendicular a uno de sus lados, trazado desde el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos medios de sus diagonales y el lado opuesto a dicho lado.

En un paralelogramo las rectas que pasan por su centro nos permiten construir las perpendiculares de superficie, y en un trapecio la base media.

Teorema 1. *El área de cualquier región cuadrangular es igual al producto de la longitud de uno de sus lados con la perpendicular de superficie trazada hacia dicho lado.*

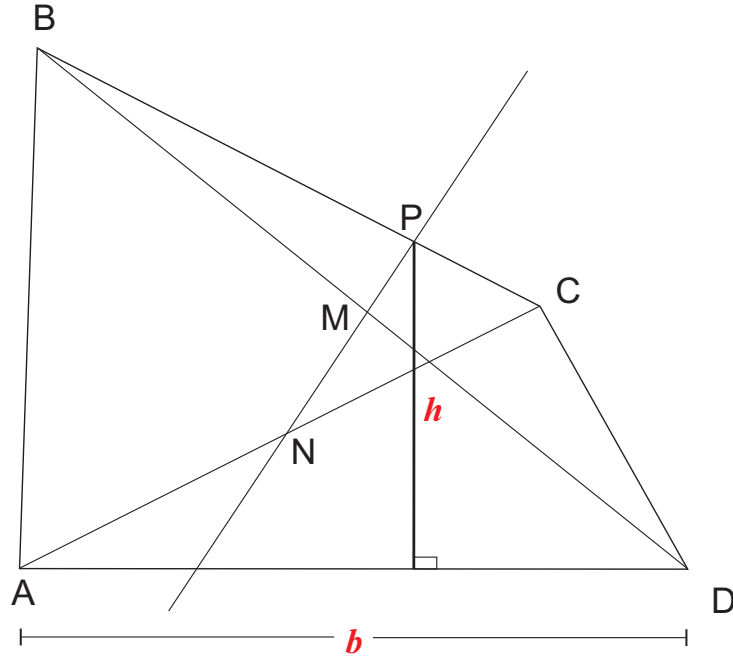


Figure 4: $[ABCD] = b \cdot h$

Por otro lado, haremos uso de un resultado que propuse en un grupo Sobregeometrias el 20 de enero del 2013 , que lo enunciaré como Teorema:

Teorema 2. *Dado un triángulo ABC , con M , N y T como puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, y $\overline{AC}$ respectivamente. La recta MN interseca a las perpendiculares trazadas desde T hacia los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en X y en Y , de modo que se cumple: $TX = TY$ y ambos tienen por longitud, la longitud de la B – Altura del triángulo ABC (altura trazada desde B).*

Demostración

Ya que $m\angle MTO = m\angle TMO = m\angle MTX$ y ya que $m\angle MXT = m\angle MBO = m\angle MHO$, los triángulos MXT y MHT serán congruentes, de donde XT será igual que HT e igual a la B – Altura del triángulo ABC . De la misma forma se prueba que $TY = B$ – Altura.

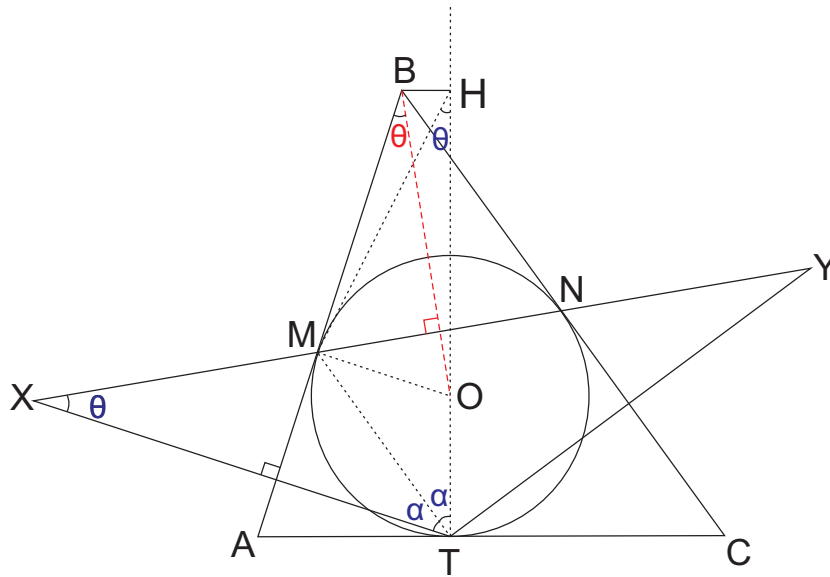


Figure 5: $TX = TY = B - \text{Altura}$

Problemas 867 TriangulosCabri Sea L el simétrico de C respecto de N en el lado AC de un triángulo ABC , cuya circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos S , T y N respectivamente. La perpendicular a $\overline{AC}$ por T interseca a la recta SN en el punto P . D es un punto en el segmento LP ubicado de modo que $\overline{SP}$ biseca a $\overline{DB}$. Calcule el coseno del ángulo ACB en función de las áreas de las regiones $LBCD$ y ABC .

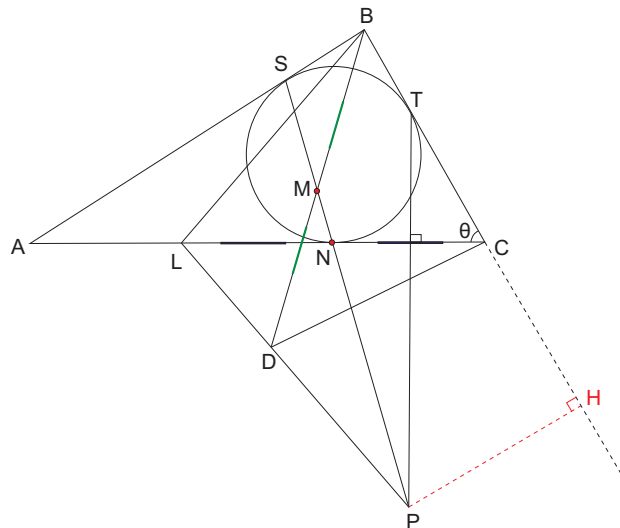


Figure 6: Si las regiones ABL y LDC tienen igual área, $m\angle ACB = 60$

Solución

El área de la región ABC es igual a $A - altura \cdot BC/2$, Pero del teorema 2 sabemos que $A - altura = TP$; es decir, el doble del área de la región ABC será igual a $TP \cdot BC$. Del teorema 1 ahora podemos afirmar que el área de la región cuadrangular $LBCD$ es igual a $PH \cdot BC$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{PH}{PT} &= \frac{[LBCD]}{2[ABC]} \\ \sin(PTH) &= \frac{[LBCD]}{2[ABC]} \\ \cos \theta &= \frac{[LBCD]}{2[ABC]}\end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene el coseno del ángulo pedido en función de las áreas solicitadas. Agregaremos que si $[LBCD] = [ABC]$, entonces el cosenos del ángulo BCA será $1/2$, es decir $\theta = 60^\circ$.

Sobre la forma presentada para calcular el área de una región cuadrangular

Podemos hacer analogías interesantes, como las mostradas a continuación, que nos permiten entender que esta forma de calcular el área de una región cuadrangular contiene a todos los casos particulares que se suelen enseñar en las secuelas secundarias de pre-grado:

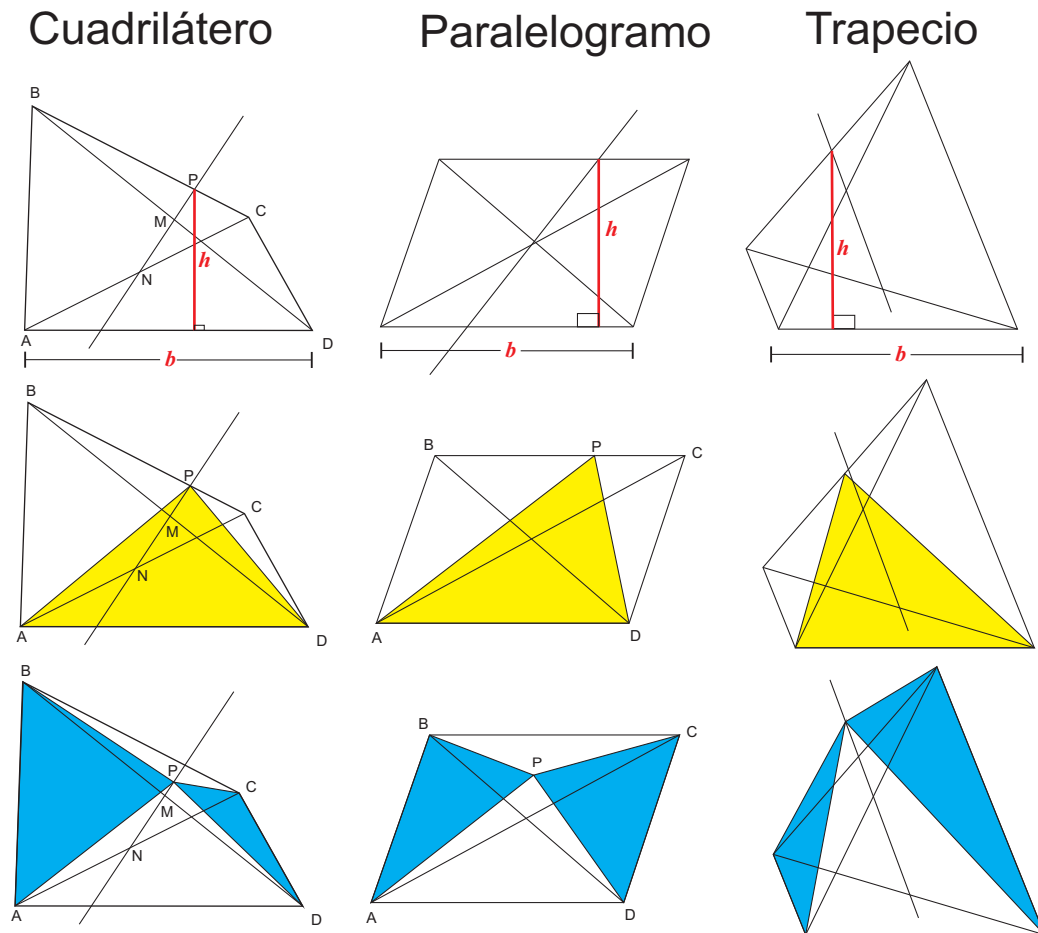


Figure 7: Comparaciones

También es posible conseguir resultados análogos a los que se verifican en un triángulo y sus circunferencias inscritas y ex inscritas, para ello se debe trabajar en un cuadrilátero que sea circunscriptible a una circunferencia, dicho cuadrilátero tendrá necesariamente a sus cuatro circunferencias ex- inscritas relativas a sus lados como se muestra en la figura 8.

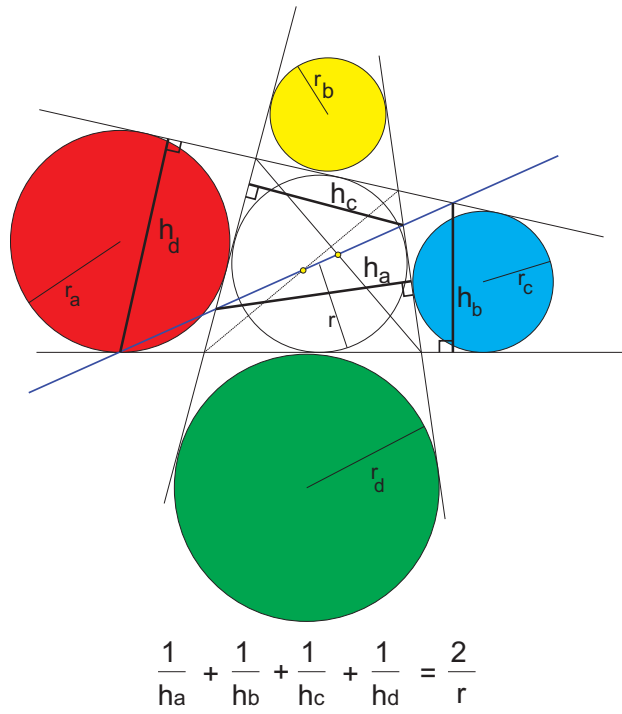
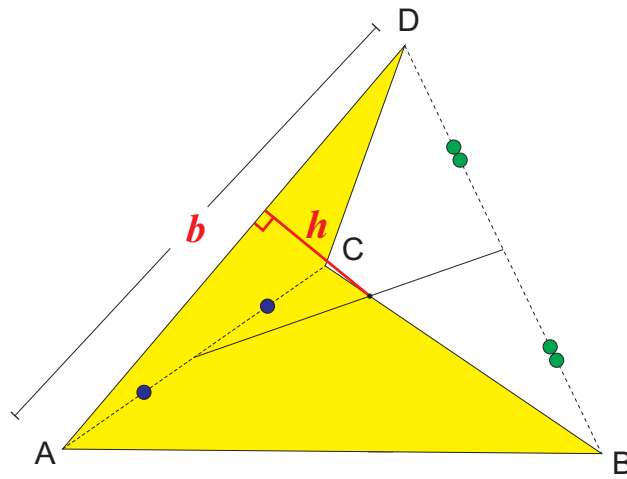


Figure 8: Teorema para las perpendiculares de superficie



$$[ABCD] = bh$$

Figure 9: Cuadrilátero de región no convexa