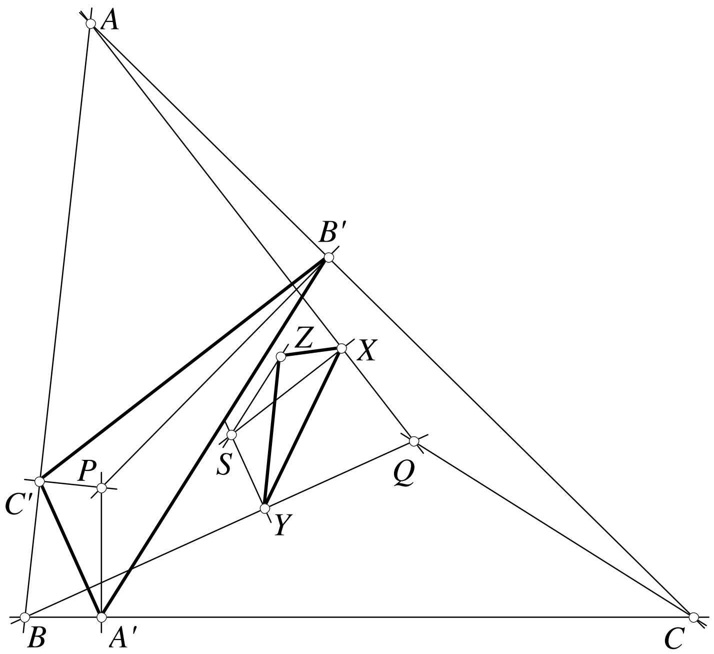
Problema 869 de *triánguloscabri*. *Dado un triángulo ABC, sean $H_aH_bH_c$ su triángulo órtico, O, K el circuncentro y el punto de Lemoine, y K_a, K_b, K_c las proyecciones ortogonales de K sobre OA, OB, OC respectivamente. Demostrar que el triángulo $K_aK_bK_c$ es semejante a $H_aH_bH_c$.*

Delehame, H. (2004) Quadrature Janvier- Mars.

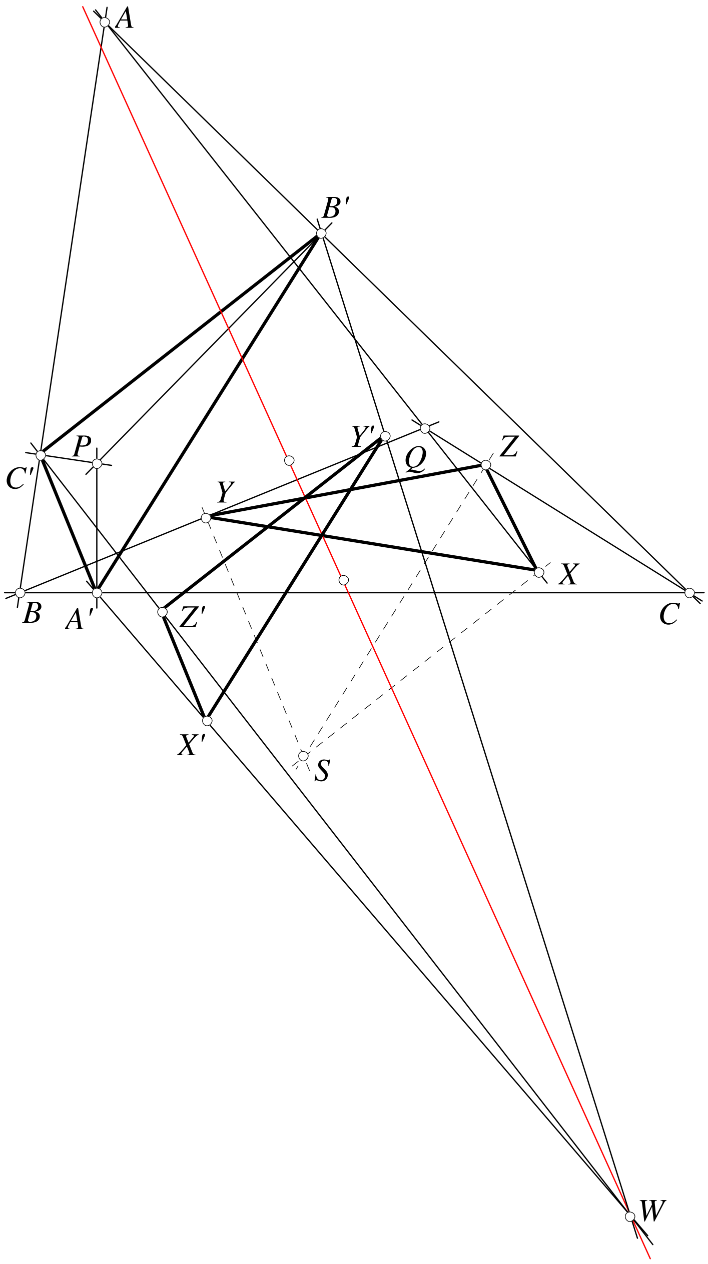
Solución de Francisco Javier García Capitán. Vamos a generalizar el problema sustituyendo K por un punto cualquiera y O y H por dos puntos conjugados isogonales cualesquiera. Recordemos que el triángulo órtico es tanto el triángulo pedal como el triángulo ceviano del ortocentro. Tenemos la siguiente generalización:

Problema. *Sean ABC un triángulo, S un punto cualquiera, y P, Q dos puntos conjugados isogonales respecto del triángulo ABC. Sean $A'B'C'$ el triángulo pedal de P y X, Y, Z las proyecciones ortogonales de S sobre las rectas QA, QB, QC, respectivamente. Entonces el triángulo XYZ es semejante a $A'B'C'$.*



Toda semejanza inversa se puede descomponer como el producto de una simetría axial seguida de una homotecia con centro sobre el eje. La figura siguiente muestra el eje (la recta roja) y el centro (el punto W) de la semejanza que transforma el triángulo $A'B'C'$ en el triángulo XYZ.

Conocidos los triángulos $A'B'C'$ y XYZ, el eje de la semejanza es la recta que une los puntos que dividen los segmentos XA' y ZC' en la razón $YZ : B'C'$. Para hallar el centro W, hallamos el triángulo simétrico de $X'Y'Z'$ respecto del eje y trazamos las rectas XX', YY', ZZ', que se cortan en un punto W del eje.



A
B′
C′
P
Y′
Q
Z
Y
X
B
A′
Z′
C
X′
S
W