

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 867. (Deleham, H. (2004) Quadrature Janvier- Mars) Dado un triángulo ABC con circuncentro O y punto simedianio K , se consideran los pies de sus alturas H_a, H_b y H_c y las proyecciones ortogonales K_a, K_b y K_c del punto K sobre las rectas OA, OB y OC , respectivamente. Demostrar que los triángulos $K_aK_bK_c$ y $H_aH_bH_c$ son semejantes.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , resulta que:

$$\begin{cases} H_a = (0 : S_C : S_B) \\ H_b = (S_C : 0 : S_A) \\ H_c = (S_B : S_A : 0) \end{cases}$$

y como $O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, entonces:

$$\begin{cases} OA \equiv 0 = c^2S_Cy - b^2S_Bz \\ OB \equiv 0 = c^2S_Cx - a^2S_Az \\ OC \equiv 0 = b^2S_Bx - a^2S_Ay \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases} K_a = (a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 : 2b^2S_B : 2c^2S_C) \\ K_b = (2a^2S_A : a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2c^2 : 2c^2S_C) \\ K_c = (2a^2S_A : 2b^2S_B : a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2) \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} H_aH_b^2 = \frac{c^2S_C^2}{a^2b^2} \\ H_bH_c^2 = \frac{a^2S_A^2}{b^2c^2} \\ H_cH_a^2 = \frac{b^2S_B^2}{a^2c^2} \end{cases} \quad \begin{cases} K_aK_b^2 = \frac{c^2S_C^2(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)}{a^2b^2} \\ K_bK_c^2 = \frac{a^2S_A^2(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)}{b^2c^2} \\ K_cK_a^2 = \frac{b^2S_B^2(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)}{a^2c^2} \end{cases}$$

y, por tanto, los triángulos $K_aK_bK_c$ y $H_aH_bH_c$ son semejantes.