

Problema 870

Siga $\triangle ABC$ un triangle i D un punt sobre la recta AB en la semirecta que conté B tal que $\overline{BD} = \overline{AC}$ i E un punt sobre la recta AC en la semirecta que conté C tal que $\overline{CE} = \overline{AB}$.

La mediatriu de $\overline{BC}$ talla la recta DE en el punt P.

Demostreu que els angles $\angle BPC$ i $\angle BAC$ són iguals.

Seimiya, T. (1997): Crux Mathematicorum. Vol 23 num 4 p. 243.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

$$\overline{CP} = \overline{BP}. \quad \overline{AD} = \overline{AE} = b + c, \text{ aleshores, } \angle ADE = \angle AED = 90^\circ - \frac{A}{2}.$$

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga $\alpha = \angle MPB = \angle MPC$.

$$\angle PBM = 180^\circ - (B + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha - B.$$

$$\angle BPD = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2} + 90^\circ + \alpha - B \right) = B + \frac{A}{2} - \alpha.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle BPD$:

$$\frac{\overline{BP}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{b}{\sin \left(B + \frac{A}{2} - \alpha \right)} \quad (1)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle BMP$:

$$\frac{a}{2 \cdot \overline{PB}} = \sin \alpha \quad (2)$$

Multiplicant les expressions (1) (2):

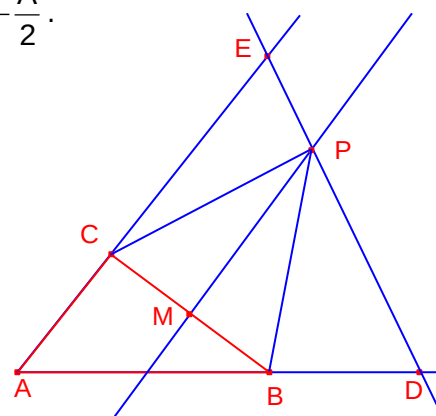
$$\frac{a}{2 \cos \frac{A}{2}} = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \left(B + \frac{A}{2} - \alpha \right)} \quad (3)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{A}{2}}{\sin \left(B + \frac{A}{2} - \alpha \right)} \quad (4)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{A}{2}}{\sin \left(B + \frac{A}{2} - \alpha \right)} \quad (5)$$

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B} = \frac{\sin \alpha}{\sin \left(B + \frac{A}{2} - \alpha \right)} \quad (6)$$



$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \left(B + \frac{A}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha \cdot \sin B \quad (7)$$

Transformant productes amb sumes:

$$\cos(B + A - \alpha) + \cos(\alpha - B) = \cos(B + \alpha) + \cos(\alpha - B).$$

$$\cos(B + A - \alpha) = \cos(B + \alpha) \quad (8)$$

$$A - \alpha = \alpha \quad \alpha = \frac{A}{2}.$$

$$\angle CPB = 2\alpha = A.$$