

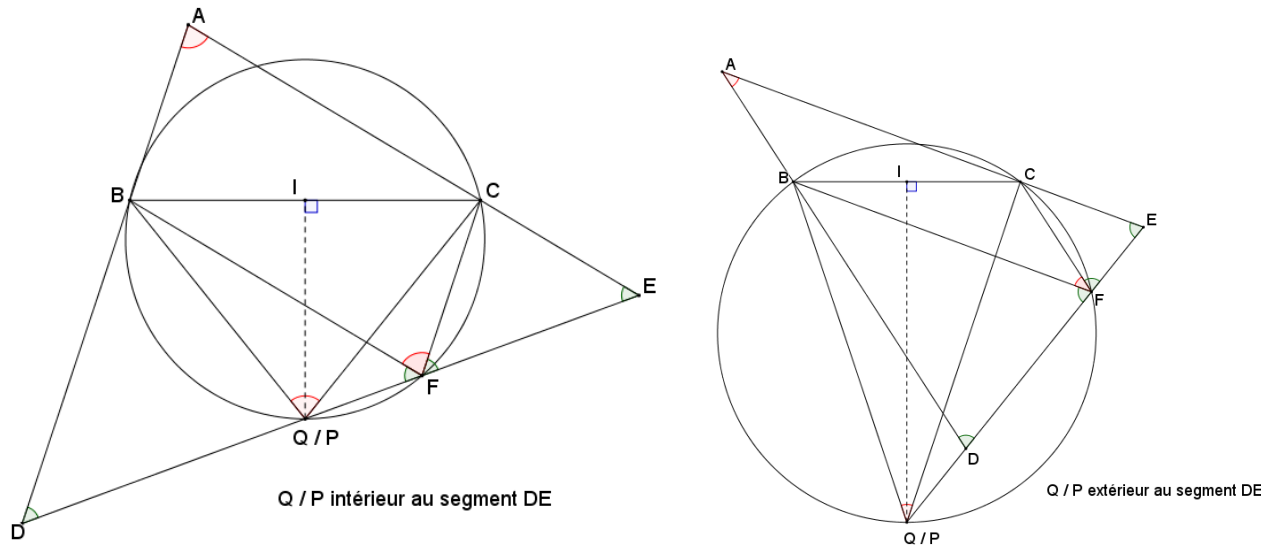
Problema n°870

2244.- ABC es un triángulo y D un punto sobre la recta AB en la semirrecta que contiene B tal que $BD=AC$, y E es un punto sobre la recta AC en la semirrecta que contiene C tal que $CE=AB$.

La mediatriz de BC corta la recta DE en P. Demostrar que los ángulos BPC y BAC son iguales

Seimiya, T. (1997): Crux Mathematicorum. Vol 23 num 4 p. 243

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Comme $AD = AB + BD = AC + CE$, le triangle ADE est isocèle.

La droite parallèle au côté AB passant par C coupe la droite DE en un point F qui peut être soit à l'intérieur du segment DE (voir figure de gauche supra) soit à l'extérieur (voir figure de droite). Le raisonnement qui suit est le même dans les deux cas. Considérons donc F à l'intérieur de DE.

Le triangle CFE semblable au triangle ADE est isocèle. Donc $CF = CE$ et le quadrilatère ABFC est un parallélogramme. Il en résulte que:

- * BF est parallèle au côté AC
- * $\angle BFC = \angle BAC$
- * $\angle BFD = \angle AED = \angle CEF = \angle CFE$.

Le cercle circonscrit au triangle BCF coupe le segment DE au point Q. Nous allons démontrer que Q est confondu avec P.

On a $\angle BQC = \angle BFC$ et $\angle FBQ = \angle FCQ$. D'autre part la loi des sinus appliquée aux triangles BQF et CFQ donne les relations:

$$BQ/\sin(\angle BFQ) = BQ/\sin(\angle BFD) = QF/\sin(\angle FBQ) = QF/\sin(\angle FCQ) = CQ/\sin(\angle CFQ) = CQ/\sin(\angle CFD).$$

Comme $\sin(\angle CFD) = \sin(180^\circ - \angle CFE) = \sin(\angle CFE) = \sin(\angle BFD)$, on en déduit $BQ = CQ$.

Le point Q, à mi-distance des points B et C, est sur la médiatrice de BC et il est confondu avec le point P.

Conclusion: $\angle BPC = \angle BAC$