

Quincena del 1 al 15 de Marzo de 2018.

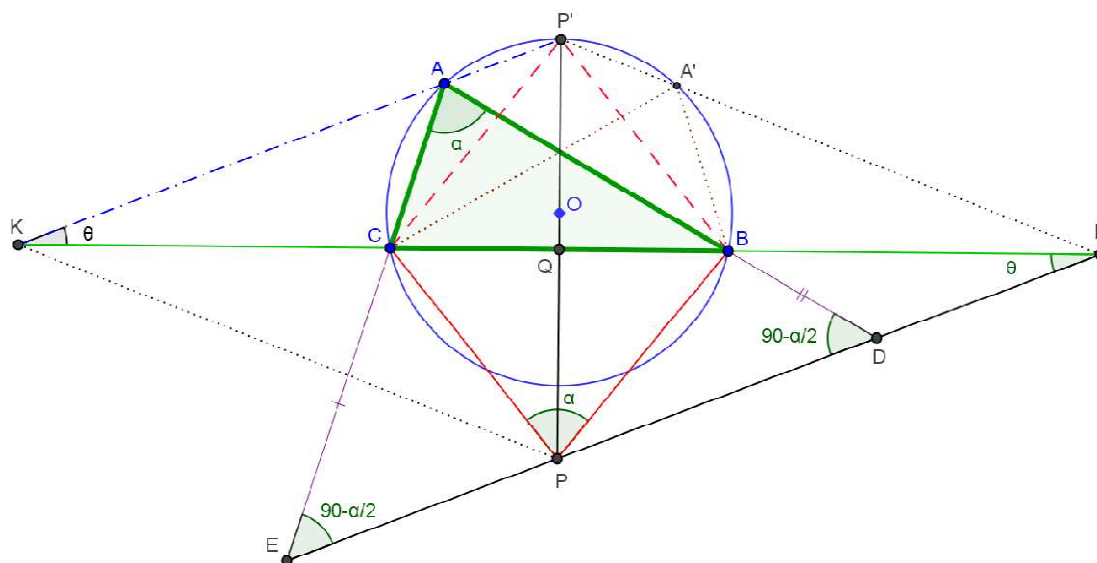
Problema 870.-

2244.- ABC es un triángulo y D un punto sobre la recta AB en la semirrecta que contiene B tal que $BD = AC$, y E es un punto sobre la recta AC en la semirrecta que contiene C tal que $CE = AB$.

La mediatriz de BC corta la recta DE en P . Demostrar que los ángulos BPC y BAC son iguales.

Seimiya, T. (1997): Crux Mathematicorum. Vol 23 num 4 p. 243.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Al pensar en demostrar que el ángulo en P del triángulo CPB es igual al ángulo A del triángulo ABC se nos ocurrió que, el simétrico P' de P , respecto del lado BC tendría que ser un punto de la circunferencia circunscrita a ABC . Y en efecto así se muestra en el dibujo y de poderlo demostrar, se habría concluido el problema.

Supongamos $c > b$ y sea F el punto de intersección de las rectas DE y BC ; K es la intersección de la bisectriz exterior de A con BC .

Al estar situado sobre la mediatriz de AB , P' es también la intersección de esta mediatriz con la bisectriz exterior de A . Por otro lado el segmento DE , al ser isósceles $\triangle ADE$, es paralelo a esa bisectriz exterior, lo que implica que $\angle P'KQ = \theta = \angle QFP$.

Vamos a demostrar que los segmentos BF y KC son de igual longitud. Con ello los triángulos $P'KQ$ y $P'FK$ son simétricos respecto de la mediatriz de BC ($FP' = KP'$) y por la igualdad de los ángulos en K y en F , y $FP' = FP$, o lo que es igual, P' es el simétrico de P respecto de BC .

El teorema de Menelao aplicado al triángulo FCE con la recta AD como transversal nos da

$$\frac{AE}{AC} \cdot \frac{BC}{BF} \cdot \frac{DF}{DE} = 1$$

o bien

$$\frac{b+c}{b} \cdot \frac{a}{BF} \cdot \frac{FD}{DE} = 1 \quad (1)$$

Con el mismo teorema para el triángulo ADE con BC como transversal se tiene ahora

$$\frac{FE}{FD} \cdot \frac{BD}{BA} \cdot \frac{CA}{CE} = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{FE}{FD} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} = 1, \quad \text{de donde} \quad \boxed{\frac{FE}{FD} = \frac{c^2}{b^2}} \quad (2)$$

Como $FE = FD + DE$, llevándolo a (2) resulta $1 + \frac{DE}{FD} = \frac{c^2}{b^2}$, de donde

$$\boxed{\frac{DE}{FD} = \frac{c^2 - b^2}{b^2}} \quad (3)$$

Multiplicando las expresiones (1) y (3) resulta por último $\frac{b+c}{b} \cdot \frac{a}{BF} = \frac{c^2 - b^2}{b^2}$ de donde es posible obtener el valor de $BF = \frac{ab}{c-b}$, **igual a la longitud del segmento CK** , aplicando el teorema de la bisectriz al triángulo ABC , como queríamos demostrar para concluir el problema.

■