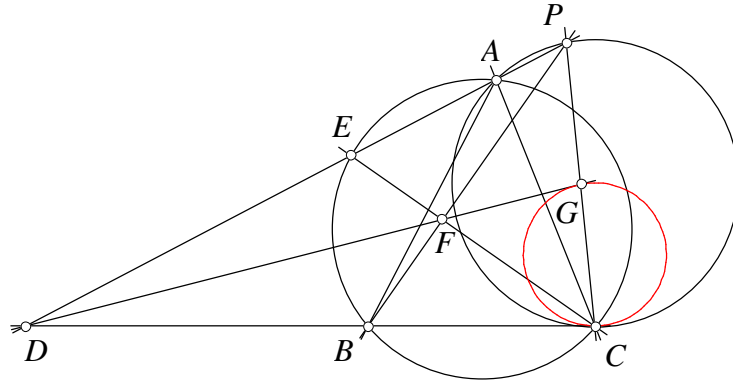


Problema 871 de *triángulos cabri*. Sean un triángulo ABC y (Γ) su círculo circunscrito. Sea (γ) el círculo que pasa por A y es tangente en C a la recta BC . Sea P un punto genérico de (γ) . La recta (AP) corta la recta (BC) en el punto D y el círculo (Γ) en el punto E . La recta (BP) y la recta (CE) se cortan en el punto F . La recta (DF) y la recta (CP) se cortan en el punto G . Determinar el lugar de G cuando P recorre todo el círculo (γ) .

Propuesto por Philippe Fondanaiche.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Si $P = (u : v : w)$, podemos calcular las coordenadas del punto G , obteniendo

$$G = (a^2uv : a^2v^2 : c^2uv + b^2uw + 2a^2vw).$$



La circunferencia γ tiene ecuación

$$\begin{aligned} a^2yz + b^2zx + c^2xy - a^2(x + y + z)y &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2y^2 + a^2xy - c^2xy - b^2zx &= 0, \end{aligned}$$

de donde podemos despejar

$$z = \frac{a^2y^2 + a^2xy - c^2xy}{b^2x},$$

y expresar las coordenadas de P de la forma

$$P = (b^2x^2 : b^2xy : y(a^2x - c^2x + a^2y)),$$

y entonces G toma la forma

$$G = (b^2x^2 : b^2xy : b^2x^2 + 2a^2y^2 + 2a^2xy + b^2xy - 2c^2xy),$$

que es el punto medio de P y C .

En efecto, si $P = (u : v : w)$, para hallar el punto medio de C y P , consideramos $C = (0 : 0 : u + v + w)$ y sumamos las coordenadas, ya que tienen la misma suma. Entonces resulta $G = (u : v : u + v + 2w)$.

Por tanto, el lugar geométrico de G es una circunferencia, el resultado de aplicar a la circunferencia γ una homotecia de centro C y radio $\frac{1}{2}$.

ADDENDA

Nos preguntamos:

1. ¿Cuál será el lugar geométrico de G al variar el punto P sobre una recta?

Si una recta l tiene ecuación $px + qy + rz = 0$, resulta que cuando P varía sobre l , el punto G varía sobre la cónica $\Gamma(l)$ con ecuación

$$b^2px^2 + 2a^2qy^2 + 2a^2pxy + b^2qxy - c^2rxy + a^2ryz = 0.$$

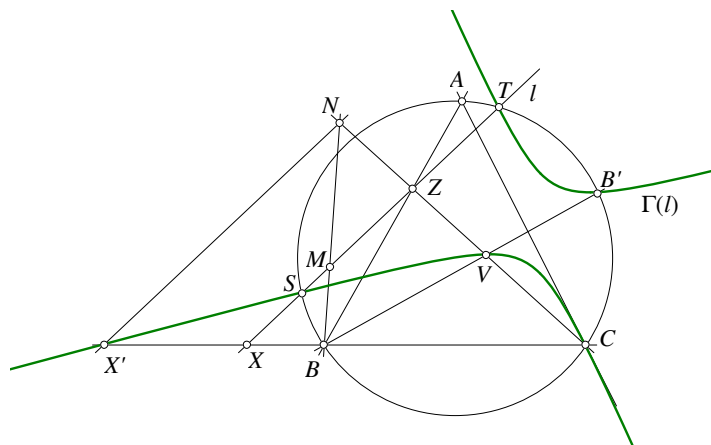
Sea X el punto en que la recta l corta a BC . El segundo punto de intersección de $\Gamma(l)$ con la recta BC es el punto $X' = (0 : r : -2q)$, por lo que, al ser $X = (0 : r : -q)$, se cumple la razón doble $(BCXX') = \frac{1}{2}$. Por tanto, tenemos la siguiente construcción del punto X' : Sean $Z = l \cap AB$, M el punto medio de XZ y N la intersección de BM y CZ . Entonces el punto X' es la intersección de BC y la paralela por N a l .

Sea B' el punto en el que la simediana correspondiente a B corta a la circunferencia circunscrita. Entonces B' está sobre $\Gamma(l)$. Además el segundo punto de intersección V de la recta BB' con la cónica está sobre la recta BZ , siendo Z el punto de intersección de l con la recta AB .

Además, la cónica $\Gamma(l)$ también pasa por C siendo tangente a la recta CA en este punto.

Con estas propiedades (cuatro puntos y una tangente) ya podemos trazar la cónica.

La ecuación de la cónica $\Gamma(l)$ puede escribirse en la forma $(b^2x + 2a^2y)(px + qy + rz) - r(a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0$, por lo que los puntos de intersección S, T de l con la circunferencia circunscrita también están sobre la cónica. Si estos puntos son reales, ya tenemos seis puntos de la cónica.



La dirección de las asíntotas quedará clara cuando respondamos a la siguiente pregunta.

2. ¿Cuándo el punto G es infinito?

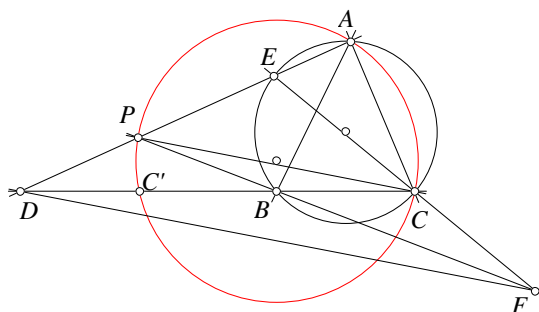
Para que G sea infinito, la suma de sus coordenadas debe ser cero. Así obtenemos la ecuación

$$a^2y^2 + a^2xy + c^2xy + b^2xz + 2a^2yz = 0,$$

que podemos expresar en la forma

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - a^2y(x + y + z) = 0,$$

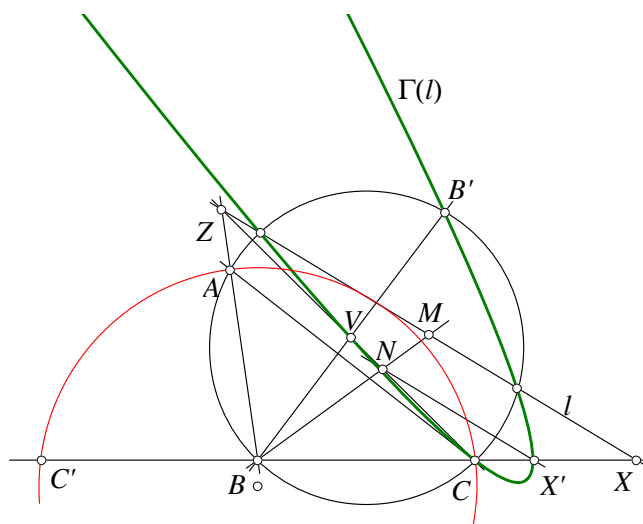
por lo que se trata de una circunferencia. Es fácil comprobar que pasa por los puntos $A = (1 : 0 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$ y $C' = (0 : 2 : -1)$, es decir, el simétrico de C respecto de B . En la siguiente figura vemos cómo FD y CP son paralelas cuando P está sobre esta circunferencia.



3. ¿Cuáles son las direcciones de las asíntotas de $\Gamma(l)$?

Teniendo en cuenta la cuestión anterior, podemos hallar las direcciones de las asíntotas de $\Gamma(l)$ tomando como P los puntos de intersección de la recta dada l y la circunferencia CAC' . Según la recta l sea secante, tangente o exterior a la circunferencia CAC' , la cónica $\Gamma(l)$ será una hipérbola, parábola o elipse, respectivamente.

Así la figura siguiente muestra el caso en que l es tangente a la circunferencia CAC' y $\Gamma(l)$ es una parábola.



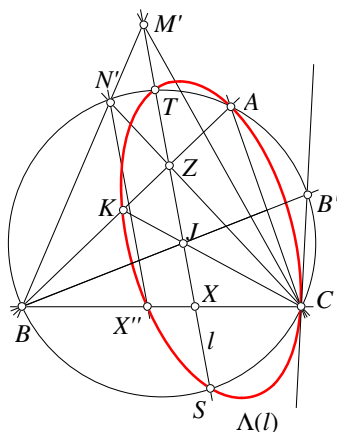
4. ¿Cuándo el punto G está sobre una recta dada l ?

El punto G estará en la recta l de ecuación $px + qy + rz = 0$ cuando P esté sobre la cónica $\Lambda(l)$ de ecuación

$$r(a^2yz + b^2zx + c^2xy) + a^2y(px + qy + rz) = 0.$$

Esto indica que los puntos de intersección de l y la circunferencia circunscrita también están sobre la cónica $\Lambda(l)$. También pasa obviamente por los puntos C y A . El segundo punto de intersección con la recta BC es $X'' = (0 : -2r : q)$ que cumple la razón doble $(BCXX'') = 2$, siendo X el punto de intersección de l y BC .

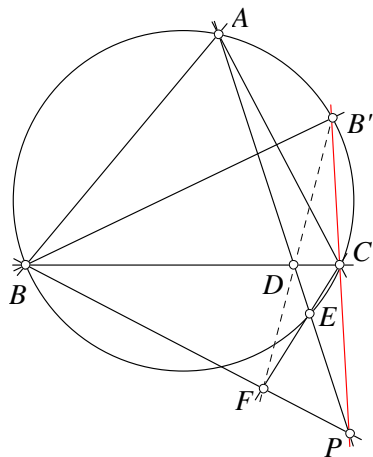
La siguiente figura detalla la construcción de la cónica $\Lambda(l)$:



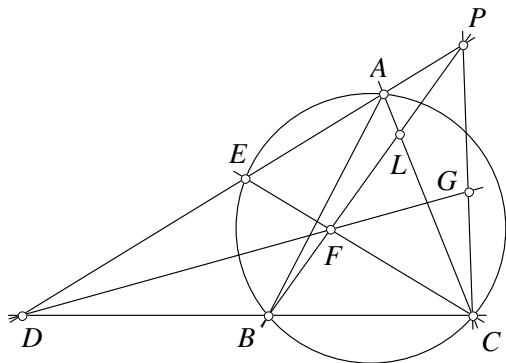
- La recta dada l corta en X y Z a las rectas BC y AB .
 - Si M' es el inverso de X respecto de Z y N' es la intersección de BM' y CZ , la paralela por N' a l corta a BC en X' .
 - Si la ceviana trazada por B corta a la circunferencia circunscrita en B' , la recta CB' es la tangente en C a la cónica $\Lambda(l)$.
 - Si J es la intersección de BB' y l y CJ corta a AB en K , el punto K está en $\Lambda(l)$.
 - Entonces $\Lambda(l)$ es una cónica que pasa por C, A, X'', K y es tangente a la recta CB' en C . Si además la recta l corta a la circunferencia circunscrita, tendremos dos puntos S y T adicionales para poder trazarla.
5. Hemos visto que si l_∞ es la recta del infinito, entonces $\Lambda(l_\infty)$ es la circunferencia CAC' . ¿Existirá otra recta l tal que $\Lambda(l)$ es una circunferencia?

La respuesta es negativa, ya que si l es una recta con ecuación $px + qy + rz = 0$, la cónica $\Lambda(l)$ es homotética a la circuncónica $a^2(q - 2r)yz - b^2rzx - (a^2p - a^2q + c^2r)xy = 0$ y puede comprobarse que se tratará de la circunferencia circunscrita sólo cuando $p = q = r$, es decir cuando l sea la recta del infinito.

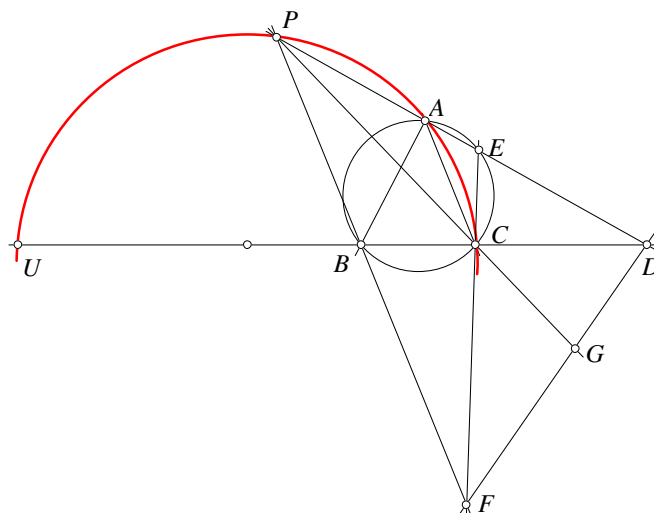
- Podemos comprobar que si B' es el punto en el que la ceviana trazada por B corta a la circunferencia circunscrita, entonces para cualquier punto P sobre la recta CB' obtenemos como G siempre el mismo punto B' , que está, como hemos dicho sobre la circunferencia circunscrita.



- El punto G , por construcción está sobre la recta CP . ¿Cuánto vale la razón $CG : GP$?


$$\frac{CG}{GP} = \frac{a^2v(u+v+w)}{a^2vw + b^2wu + c^2uv}.$$
$$\frac{CG}{GP} = \frac{PL}{LB} \cdot \frac{a^2}{OP^2 - R^2}.$$

8. Hemos visto que si P está sobre la circunferencia γ entonces G es el punto medio de CP ? ¿Para qué otros puntos P para los que $CP = 2CG$?



Sea U el punto sobre BC tal que $UB : BC = 3 : 1$. Entonces si P está sobre la circunferencia UAC , tendremos la razón

$$PU : UG = -2.$$

9. ¿Para qué puntos P la distancia CP es k veces la distancia CG ?

La respuesta en este caso está formada por dos circunferencias que pasan por A y C . Los segundos puntos de intersección de estas circunferencias con la recta BC son los puntos U_1 y U_2 tales que $U_1B : BC = 1 - k$ y $U_2B : BC = 1 + k$.