

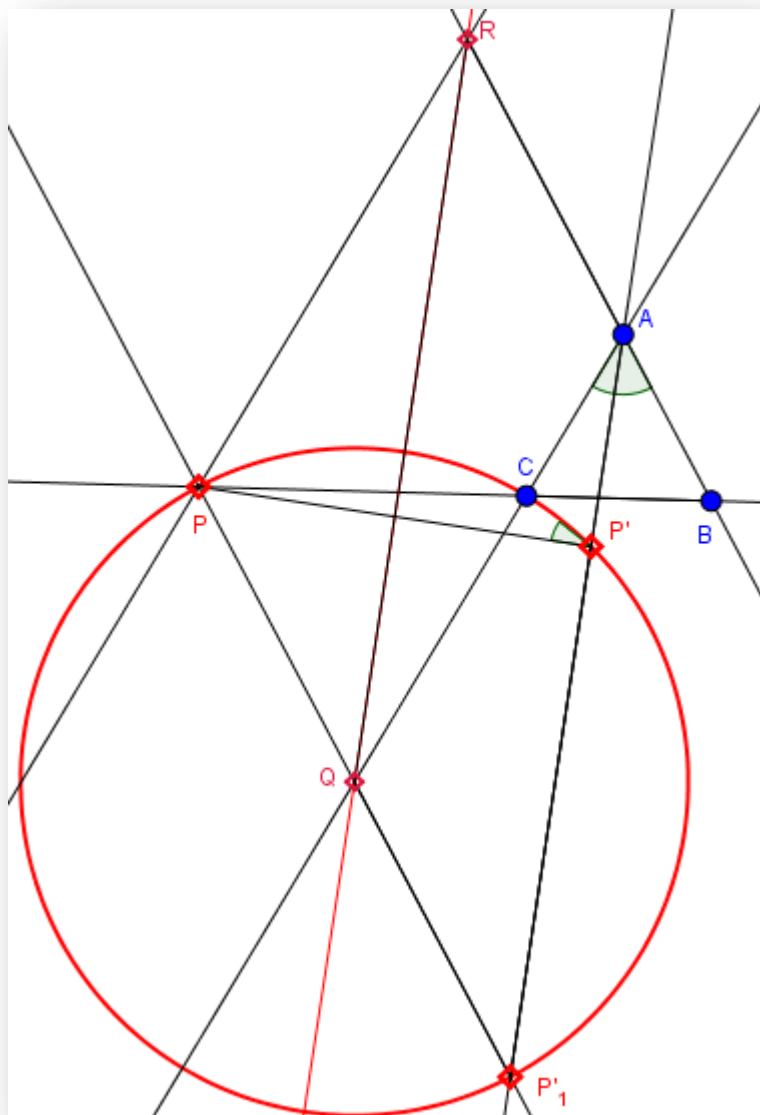
Problema 872.-

Sean P cualquier punto de la base de un triángulo isósceles. Sean Q y R las intersecciones de los lados que contienen a P paralelas a los mismos. Probar que la reflexión de P según la recta QR pertenece a la circunferencia circunscrita a triángulo dado.

Leigh, R.B , Liu, A 2011. *Hungarian Problem Book IV*. MAA.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea realizada la construcción según el enunciado. Observamos que el cuadrilátero ARPQ es un paralelogramo.



Si designamos por:

$\alpha = \angle BAC$, entonces:

$$\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\angle CAR = 180^\circ - \alpha \rightarrow$$

$$\angle RPQ = 180^\circ - \alpha$$

$$\text{Como } \angle RPC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \rightarrow$$

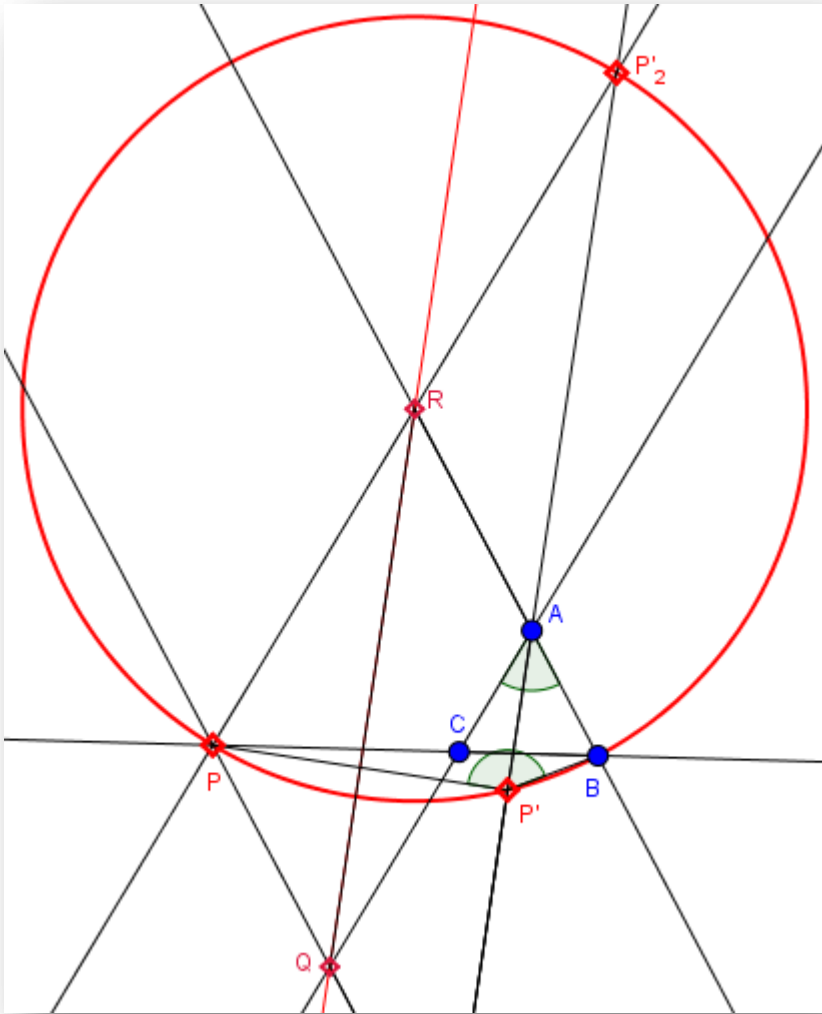
$$\angle QPC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle QCP$$

$$\rightarrow QP = QC.$$

Como además $QP = QP'$,
los puntos P, C y P' se encuentran
en la circunferencia de centro Q y
radio $QP = QC = QP'$.

Por tanto, podemos deducir
que el valor del ángulo

$$\angle CP'P = \frac{1}{2} \angle QPC = \frac{1}{2} \alpha \quad (I).$$



Además, si ahora consideramos que $RP = RB = RP' \rightarrow$ entonces los puntos P, B y P' se encuentran en la circunferencia de centro R y radio $RP = RB = RP'$

Por tanto, podemos deducir que el valor del ángulo

$$\angle PP'B = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle PRB;$$

$$\angle PP'B = 180^\circ - \frac{1}{2} \alpha \quad (II).$$

Si ahora tenemos en cuenta (I) y (II), podemos determinar el valor del ángulo

$$\angle CP'B = \angle PP'B - \angle PP'C$$

$$\angle CP'B = 180^\circ - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \alpha;$$

$$\angle CP'B = 180^\circ - \alpha$$

Por tanto, $ABCP'$ son concíclicos.

En efecto pues, el punto P' se encuentra en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .

cqd ■