

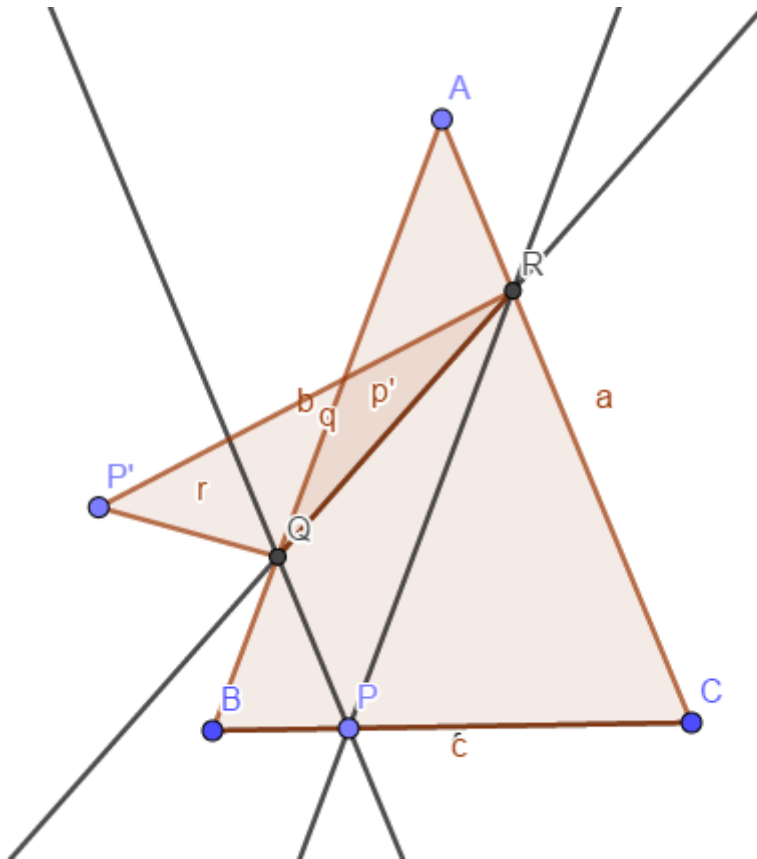
Problema 872

Problema 2. Sea P cualquier punto de la base de un triángulo isósceles. Sean Q y R las intersecciones de los lados iguales con las rectas que contienen a P paralelas a los mismos. Probar que la reflexión de P según la recta QR pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

Leigh, R.B., Liu, A. (2011): Hungarian Problem Book IV. MAA.

Solución del director

Sea ABC el triángulo. Con $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \alpha/2$



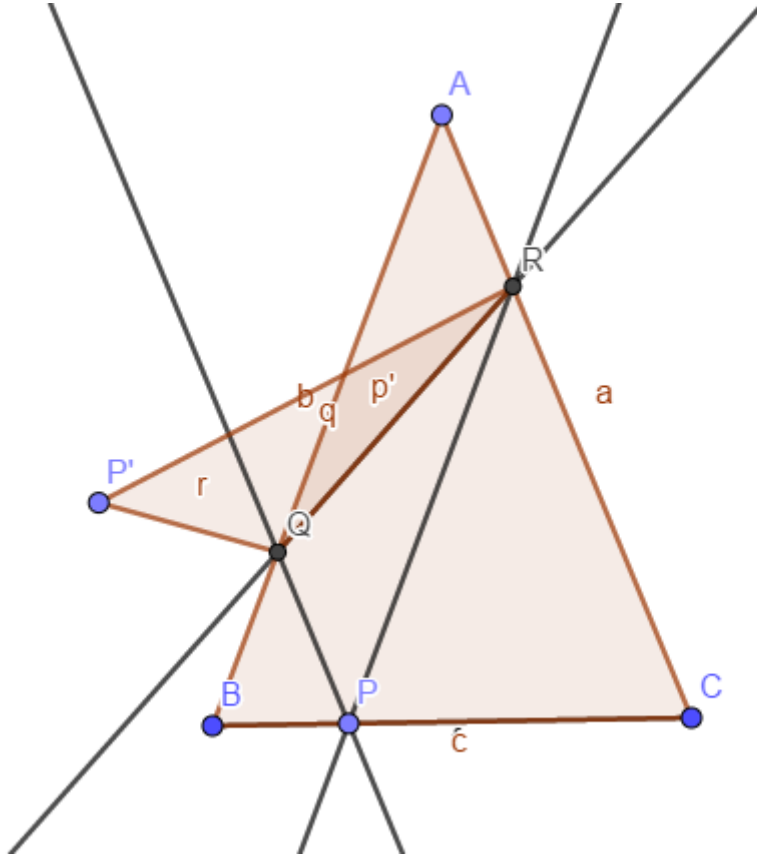
Sea P' el simétrico de P respecto a QR .

Estudiemos el ángulo $AP'B$.

$\angle RP'Q = \alpha$ por la construcción hecha.

Sea $\angle QRP = \varphi$, es $\angle QRP' = \angle QAP' = \varphi$, por ser el cuadrilátero $AP'QR$ circunscrito por ser los ángulos en A y en P' iguales a α .

Al ser $AR=BP=QP'$, es $\angle AP'R = \varphi$



Por otra parte, El triángulo P'QB es isósceles, con

$$\begin{aligned}\angle P'QB &= 360^\circ - \angle P'QR - \angle PQR - \angle BQP = \\ 360^\circ - (180^\circ - \varphi - \alpha) - (180^\circ - \varphi - \alpha) - \alpha &= 2\varphi + \alpha\end{aligned}$$

Así $\angle BP'Q = 90^\circ - \varphi - \frac{\alpha}{2}$. es decir,

$$\angle AP'B = \angle AP'R + \angle RP'Q + \angle QP'B = \varphi + \alpha + 90^\circ - \varphi - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

Luego, al ser $\angle ACB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, se tiene lo pedido.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla España

