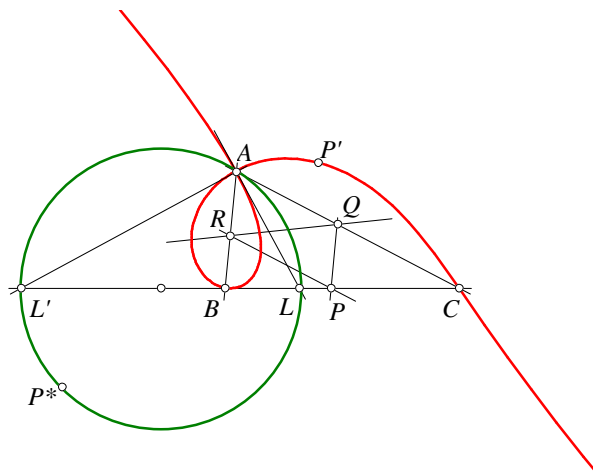


Problema 872 de triángulos cabri. Sea P cualquier punto de la base de un triángulo isósceles. Sean Q y R las intersecciones de los lados iguales con las rectas que contienen a P paralelas a los mismos. Probar que la reflexión de P según la recta QR pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

Leigh, R.B., Liu, A. (2011): Hungarian Problem Book IV. MAA..



Si $P = (0 : v : w)$ es un punto sobre BC , el punto simétrico P' de P respecto de QR resulta ser el punto

$$P' = (2vw(S_Bv + S_Cw) : v(c^2v^2 - b^2w^2) : w(b^2w^2 - c^2v^2)).$$

Al variar P' sobre la recta BC , el punto P' describe la cúbica $\mathcal{K}_a$ de ecuación

$$(c^2y^2 - b^2z^2)x + 2(S_By - S_Cz)yz = 0.$$

Esta cúbica tiene las siguientes propiedades:

1. Es la conjugada isogonal de la cónica

$$(b^2 - c^2)(c^2xy + b^2xz + a^2yz) + (x + y + z)a^2(c^2y - b^2z) = 0,$$

que es la circunferencia que tiene por diámetro LL' , siendo L y L' los pies de las bisectrices interior y exterior del ángulo A sobre la recta BC .

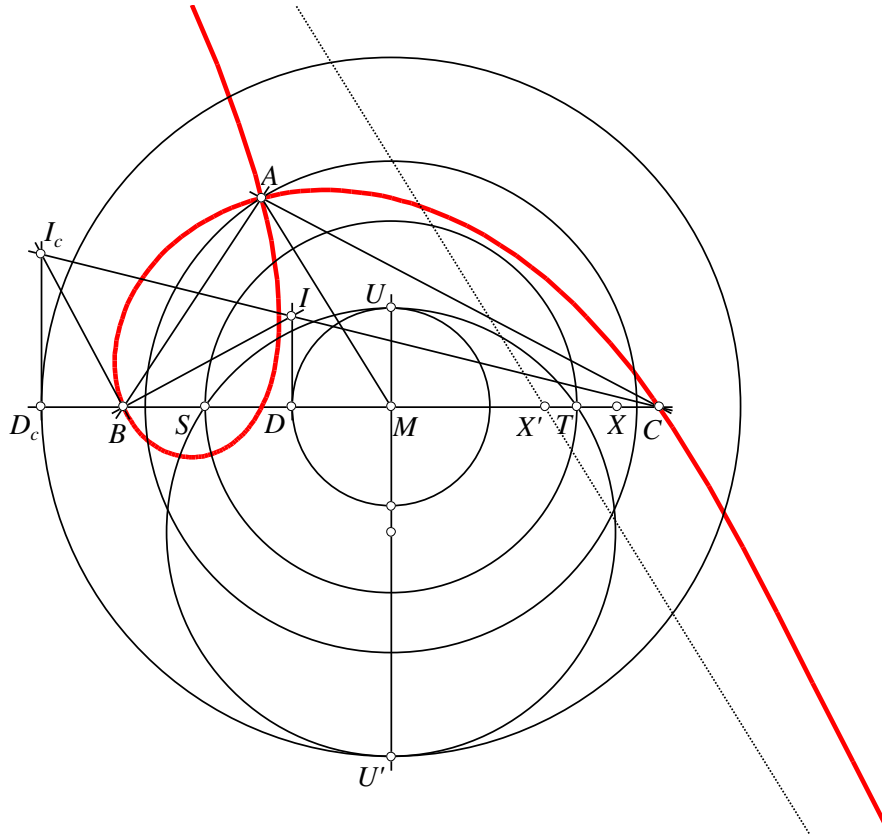
2. Sus puntos del infinito son los puntos circulares del infinito y el punto $(-2 : 1 : 1)$, es decir, el punto del infinito de la mediana que pasa por A , que por tanto será paralela a su asíntota.
3. Cuando $b = c$, la cúbica $\mathcal{K}_a$ se factoriza como

$$(y - z)(a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0.$$

lo cual resuelve nuestro problema, ya que $y = z$ es la mediana que pasa por A , que en este caso también es la mediatriz de BC y que no puede con tener a P' más que en el caso en que P sea el punto medio de BC , en el que tendremos $P' = A$.

Hemos dicho que la asíntota de $\mathcal{K}_a$ es paralela a la mediana AM que pasa por A . Conocida la ecuación de la curva y el punto del infinito donde la asíntota es tangente, podemos obtener la ecuación de la tangente y trazarla con *Mathematica*, pero ¿como trazarla con *Cabri*?

Podemos calcular que el punto en que la asíntota corta a la recta BC tiene coordenadas $(0 : a^2 - b^2 - 3c^2 : a^2 - 3b^2 - c^2)$. Este punto está nombrado X' en la figura siguiente:

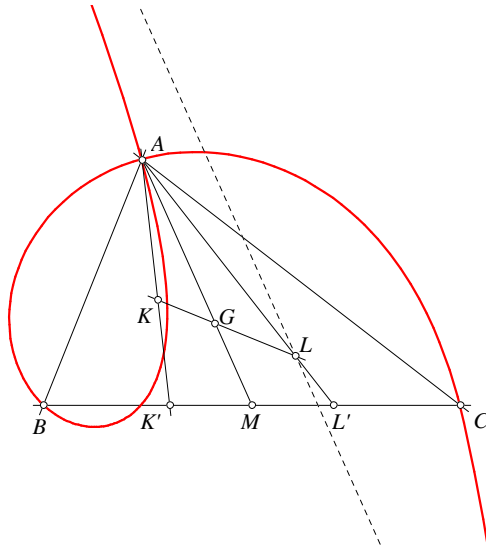


Para construir dicho punto hemos usado que se cumple la fórmula

$$MX' \cdot m_a^2 = \frac{1}{8}a|b^2 - c^2| \Rightarrow \frac{m_a^2}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{|b^2 - c^2|}{4}}{MX'},$$

siendo m_a la longitud de la mediana AM . En la figura, correspondiente a $b > c$, hemos hallado el incentro I y el excentro I_c , y sus proyecciones D y D_c sobre la recta BC . Con centro M hemos trazado las circunferencias con radios MD y MD_c , que cortan a la mediatriz de BC en puntos U y U' a distinto lado de M . A continuación, siendo S y T los puntos de intersección de la circunferencia con diámetro UU' y la recta BC , hallamos primero el punto inverso X de C respecto de la circunferencia (M, m_a) y a continuación el punto inverso de X' respecto de la circunferencia con diámetro ST .

A continuación vemos otra forma de trazar la asíntota:



Sean K y G el punto simediano y el baricentro de ABC . Las rectas AK y AG cortan a BC en K' y M , y L' es el simétrico de K' respecto de M . Entonces si la recta AL' corta a KG en L , la paralela a AM por L es la asíntota de $\mathcal{K}_a$.

Para obtener esta simplísima forma de trazar la asíntota, fue de utilidad la información proporcionada por Chris van Tienhoven en el grupo ADGEOM:

<https://groups.yahoo.com/neo/groups/AdvancedPlaneGeometry/conversations/messages/4455>