

Problema 872

Siga P un punt qualsevol de la base d'un triangle isòsceles.

Siguen Q i R les interseccions dels costats iguals amb les rectes que contenen P paral·leles als costats iguals.

Proveu que la reflexió de P segons la recta QR pertany a la circumferència circumscrita al triangle donat.

Leigh, R.B, Liu, A. (2011) Hungarian problem Book IV MAA.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Siga P un punt qualsevol sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga P' el punt simètric de P respecte de la recta RQ.

PQCR és un paral·lelogram.

$$\overline{PR} = \overline{P'R} = \overline{CQ} = \overline{AR}.$$

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q} = \overline{BQ} = \overline{CR}.$$

Siga $\gamma = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle CAB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

$$\angle QPR = \gamma.$$

Els triangles $\triangle PQR$, $\triangle P'QR$ són iguals. Aleshores:

$$\angle QP'R = \angle QPR = \gamma.$$

Siga $\alpha = \angle P'QR = \angle PQR = \angle CRQ$.

Aleshores, el quadrilàter RQCP' és cíclic.

$$\angle P'CR = \angle P'QR = \angle CP'Q = \alpha.$$

$$\angle P'RQ = 180^\circ - (\alpha + \gamma).$$

$$\angle P'RA = 180^\circ - \angle P'RQ + \angle CRQ = 2\alpha + \gamma.$$

$$\angle RP'A = \frac{180^\circ - (2\alpha + \gamma)}{2} = 90^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2}.$$

$$\angle CP'A = \angle CP'Q + \angle QP'R + \angle RP'A = \alpha + \gamma + 90^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Aleshores, $\angle CP'A$ i $\angle ABC$ són suplementaris.

Aleshores, ABCP' és cíclic, per tant P' pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.

